OFERTA DE TESINAS 2024
DIPLOMA EN MATEMÁTICA

Índice

1. Topología, medida y Geometría fractal 2
2. Espacios de cubrimiento 3
3. Transición de fase en percolación 3
4. Primeros ejemplos de Cuantizaciones 4
5. El problema de los tres cuerpos 4
6. Grupos finitos de isometrías del espacio 5
7. Conjuntos C1 minimales del círculo 6
8. El grupo fundamental de un espacio topológico: Un acercamiento a interacciones entre álgebra, topología y geometría, con varias aplicaciones al cálculo 6
9. Teorema Fundamental del Álgebra 8
10. Geometrías de Hilbert 8
11. Acción del grupo modular en el grafo de Farey 9
12. Grafos y grupos libres 9
13. Grupos finitos de matrices 10
14. Introducción a la teoría de grafos 11
15. Método de elementos finitos 11
16. Cálculo de variaciones y superficies mínimas 12
17. Generalización del concepto de espacio vectorial 12
18. La estimación de máxima versimilitud 13
19. El teorema de Fischer-Tippet 13
20. Introducción a los modelos lineales 14
21. La esfera tridimensional como grupo de Lie 15
22. Elementos de teoría de nudos 15
23. Cuantización geométrica de las ecuaciones de Maxwell 15
24. Introducción a la teoría algebraica de grafos 16
25. Análisis y Desarrollo del Algoritmo PageRank para la Clasificación de Resultados en Motores de Búsqueda. 16

26. Teoría de Galois 18
27. El Teorema de Picard 18
28. Aplicaciones del teorema espectral 18
29. Análisis de Fourier finito 19
30. Series de Fourier y aplicaciones 19
31. Equidescomponibilidad de polígonos y de poliedros 20
32. La paradoja de Banach-Tarski 20
33. La transformada de Fourier 21
34. Algebras de transformaciones lineales 21

1. Topología, medida y Geometría fractal

Docente. Gonzalo Cousillas. gonzacousillas@gmail.com.

Resumen y objetivos. ¿Qué es un fractal? Benoit Mandelbrot acuñó el término en 1975. Existe (o debería haber) una definición matemática precisa del concepto. En general hay un uso figurado del término para describir fenómenos que son muy quebradizos. En términos generales, un conjunto fractal es un conjunto que es más "irregular" que los conjuntos considerados en la geometría clásica. Por mucho que se amplíe el conjunto, las irregularidades cada vez más pequeñas se hacen visibles. Mandelbrot sostiene que tales abstracciones geométricas a menudo se adaptan mejor al mundo físico que las configuraciones regulares o las curvas y superficies suaves. Para definir un fractal, Mandelbrot escribe: "Un fractal es un conjunto para el cual la dimensión de Hausdorff-Besicovitch excede estrictamente la dimensión topológica". [3]

En esta tesina nos planteamos desarrollar los conceptos necesarios para entender esta definición y profundizar en algunos resultados. El estudio de la dimensión de Hausdorff requiere de teoría de la medida; el estudio de la dimensión topológica requiere topología métrica.

Mandelbrot expresó más tarde algunas complicaciones sobre esta definición: "En la ciencia, esta definición resulta excesiva; no sólo incómoda, sino genuinamente inapropiada. . . Esta definición deja fuera muchos "fractales limítrofes", pero se ocupa, más o menos, de diferenciar la frontera respecto a los objetos de la geometría Euclidiana. Pero la frontera respecto al verdadero caos geométrico quedó abierta de par en par."[3]

Nos planteamos discutir una forma (propuesta por James Taylor) de reparar la definición propuesta por Mandelbrot. Esta trata sobre el concepto de dimensión fractal.

Se pretende que el estudiante que se proponga desarrollar esta tesina logre responder la pregunta inicial, manejar en profundidad este concepto, una gran variedad de ejemplos y algunos resultados. El contexto será el de espacios métricos, sin embargo la mayoría de los ejemplos a trabajar se pueden considerar contenidos en el espacio bidimensional, por lo que se puede obtener un registro gráfico que favorezca la comprensión.

Prerrequisitos. Nociones de Topología de espacio métricos. Nociones de Teoría de la medida.

Bibliografía.

[1] Edgar, G. Measure, topology, and fractal geometry. 2nd ed. New York, NY: Springer, 2008.

[2] Falconer, K. J.: Fractal Geometry: Mathematical Foundations and Applications. Wiley, Chichester, 2003.

[3] Mandelbrot, B. B.: The Fractal Geometry of Nature. W. H. Freeman and Company, New York, 1982.

2. Espacios de cubrimiento

Docente. Juliana Xavier,jxavier@fing.edu.uy.

Resumen y objetivos. El objetivo es estudiar el lenguaje geométrico de los espacios de cubrimiento.

Los espacios de cubrimiento son una herramienta importante en muchas áreas de la matemática. Se utilizan para construir variedades, orbifolds, para calcular grupos de homotopía, establecen diccionarios entre propiedades algebraicas y propiedades geométricas, y muchas cosas más.

La idea es estudiar la teoría a través de ejemplos, y llegar a clasificar todos los espacios de cubrimiento de un espacio fijo X.

Prerrequisitos. Algún curso básico de topología.

Bibliografía.

Algebraic Topology, Allen Hatcher.
https://pi.math.cornell.edu/~hatcher/AT/AT.pdf.

3. Transición de fase en percolación

Docente. Nicolás Frevenza, nfrevenza@gmail.com.

Resumen y objetivo. En $\mathbb{Z}^d$ se dice que hay una arista entre dos vértices x e y cuando $|x-y|=1$, siendo $|\cdot|$ la distancia euclideana. En ese grafo se realiza el siguiente procedimiento: para cada arista se sortea su permanencia en el grafo; con probabilidad $p \in [0,1]$ se la mantiene y se la borra con probabilidad $1-p$. El resultado es un grafo aleatorio que se denomina proceso de percolación de parámetro p en $\mathbb{Z}^d$. La propuesta consiste en estudiar propiedades de este grafo aleatorio que presentan una transición de fase, es decir, ante cambios infinitesimales en el valor de p, el cambio cualitativo y cuantitativo en el grafo aleatorio es muy grande. La idea es concentrarse en estudiar cómo es la probabilidad de que el origen esté en una componente conexa infinita (cluster infinito) del grafo y las características de esta componente. El objetivo es probar que existe una transición de fase y estudiar el tamaño de la componente conexa que contiene al origen en función de p.

Prerrequisitos. Haber realizado un curso de probabilidad (o probabilidad y estadística) y tener conocimientos muy básicos de grafos.

Bibliografía.

[1] Grimmett, Geoffrey. Percolation. Second edition. Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, 321. Springer-Verlag, Berlin, 1999. xiv+444 pp. ISBN: 3-540-64902-6.

[2] Duminil-Copin, Hugo and Tassion, Vincent. A new proof of the sharpness of the phase transition for Bernoulli percolation on Zd. Enseign. Math. 62 (2016), no. 1-2, 199–206.

4. Primeros ejemplos de Cuantizaciones

Docente. Alejandro Passeggi. alepasseggi@gmail.com.

Resumen y objetivos. Se discutirá el significado físico y matemático de los estados estacionarios en la ecuación de Schrödinger y luego se procederá a su cálculo en situaciones sencillas, como el movimiento armónico simple. Si el tiempo lo permite, buscaremos llegar a tratar la cuantización del átomo de hidrógeno

Prerrequisitos. Cálculo en varias variables y ecuaciones diferenciales en la recta.

Bibliografía.

[1] David Tong, Quantum Mechanics. Lecture Note, http://www.damtp.cam.ac.uk/user/tong/quantum.html.

[2] Richard Feynman, The Feynman Lecture Notes on Physics, Vol 3: Quantum Mechanics.

Comentarios. Esta propuesta tiene, indudablemente, un sabor físico.

5. El problema de los tres cuerpos

Docente. Ezequiel Maderna, eze@fing.edu.uy.

Resuman y objetivos. Entender el movimiento de los planetas de nuestro sistema solar ha sido desde siempre una de las mayores ambiciones científicas de la humanidad. En particular lo ha sido para los matemáticos, y más aún a partir de la formulación de la ley de gravitación universal por Isaac Newton en 1687. Desde entonces mucho hemos descubierto, y mucha matemática se desarrolló para resolver los enigmas de este problema. Sin embargo, aún son muchas las interrogantes sin resolver.

Esta propuesta - para desarrollar por un estudiante o por varios en equipo - consiste en describir los avances más recientes y las herramientas utilizadas, aunque no se pretende que los participantes asimilen globalmente las pruebas, pero si los esquemas de funcionamiento y los aspectos más básicos.

En caso de haber varios interesados, trabajaremos en forma colectiva en los aspectos comunes de cada tesis, y temas individuales para cada estudiante podrían ser (a modo de ejemplo): existencia de órbitas coreográficas, formas de expansión y dispersión, estabilidad de movimientos homográficos, colisiones y pseudocolisiones, o cualquier otra que se establezca de común acuerdo entre el estudiante y el orientador.

Prerrequisitos. Álgebra lineal y cálculo diferencial en varias variables, fundamentos de topología general y de ecuaciones diferenciales.

Bibliografía.

[1] Chenciner, Alain: Three body problem, Scholarpedia, http://www.scholarpedia.org/article/Three_body_problem.

[2] Diacu, Florin: The solution of the n-body problem, The Mathematical Intelligencer, 1996, 18, p. 66–70

[3] Maderna, Ezequiel: Notas sobre el problema de N cuerpos, XXIX Escuela Venezolana de Matemáticas (EMALCA), Mérida, Venezuela 2016

Comentarios. Las reuniones de trabajo pueden ser tanto en Montevideo (IMERL - Facultad de Ingeniería) como en la sede Maldonado del CURE.

La relación de estas propuestas con la serie de Netflix es tenue, aunque los creadores de la serie han hecho varios guiños a los descubrimientos matemáticos de distintas épocas.

6. Grupos finitos de isometrías del espacio

Docente. Andrés Abella,andres@cmat.edu.uy.

Resumen y objetivos. Los poliedros y las isometrías se estudian en los cursos de secundaria y, por lo tanto, en formación docente. Estos temas tienen un punto de cruce en el estudio de las simetrías de un poliedro, es decir, las isometrías que llevan el poliedro en sí mismo. Estas simetrías forman un grupo con la composición, llamado el grupo de simetrías del poliedro, el cual se utiliza en el estudio de las propiedades del poliedro. Por ejemplo, se requiere para definir precisamente el concepto de que un poliedro convexo sea regular.

Recordar que los poliedros convexos regulares, también llamados sólidos platónicos, son el tetraedro, cubo, octaedro, dodecaedro e icosaedro. Sus grupos de simetrías se conocen bien y fueron el tema de la tesina de Alejandra Gutiérrez, titulada Grupos de simetrías de los sólidos platónicos.

Por otro lado, en el espacio existen infinitas isometrías, pero se cumple una propiedad interesante: todo grupo finito de isometrías directas del espacio, resulta ser un grupo cíclico, o un grupo diedral, o el grupo de simetrías directas de algún sólido platónico. Este resultado se atribuye a F. Klein.

El objetivo es probar el teorema de clasificación de los grupos finitos de isometrías directas del espacio. Para eso, se empezará por leer los primeros capítulos de la tesina de A. Gutiérrez y completar algunas demostraciones (hay notas para esa parte). Luego seguiríamos la prueba en el libro de M. Artin.

Prerrequisitos. Conocimientos básicos de álgebra de grupos y de geometría métrica en el espacio. La parte de geometría se ve en los cursos de formación docente y la parte algebraica consiste en saber algo de grupos y de acciones de grupos en conjuntos, lo cual esencialmente está en la tesina de A. Gutiérrez. Dado que en el trabajo hay que incluir dibujos de figuras en el espacio, se necesita conocer algún programa que permita hacerlo, como el Geogebra 3D.

Bibliografía.

[1] Algebra. Second edition. M. Artin. Pearson. 2013.

[2] Grupos. A. Abella. Notas para el curso de Grupos y Teoría de Galois, de la Licenciatura en Matemática de la Facultad de Ciencias.

[3] Grupos de simetrías de los sólidos platónicos. M. A. Gutiérrez. Tesina del Diploma en Matemática (mención Aplicaciones), 2020. http://dmel.multisitio.interior.edu.uy/diploma-en-matematica/

Otros comentarios. El trabajo consiste primero en el estudio de algunas propiedades de grupos, luego hay que leer la tesina de A. Gutiérrez (no todos los detalles, pero sí algunas partes) para ver cómo son los grupos de simetrías de los sólidos platónicos, estudiar la prueba del teorema de clasificación y finalmente escribir la tesina, resumiendo los primeros temas y escribiendo en detalle la prueba del teorema. Dependiendo del tiempo libre para realizarlo, esto se podría realizar bien en 4 o 6 meses. Yo no voy a estar disponible a partir de marzo o abril del año próximo, así que la tesina debería de estar concluida antes de esas fechas.

7. Conjuntos C1 minimales del círculo

Docente. Aldo Portela, aldo@fing.edu.uy.

Resumen y objetivos. Dinámica de homeomorfismos: Teoría de Poincaré, número de rotación, conjuntos minimales y medidas invariantes. Conjuntos C1 minimales para difeomorfismos del círculo. Ejemplos y condiciones que implican que un conjunto no es C1 minimal.

Prerrequisitos. Topología en $\mathbb{R}$. Conceptos básicos de teoría de la medida.

Bibliografía.

[1] Wellington de Melo, Sebastian van Strien, 1993, One-dimensional dynamics. Springer-Verlag. Wellington de Melo, 1988, Lectures on one-dimensional dynamics. IMPA, CNPq.

8. El grupo fundamental de un espacio topológico: Un acercamiento a interacciones entre álgebra, topología y geometría, con varias aplicaciones al cálculo

Docente. Marco Antonio Pérez, mperez@fing.edu.uy.

Resumen y objetivos. El concepto de invariante topológico (propiedades que son preservadas por homeomorfismos) es de gran importancia a la hora de clasificar espacios topológicos. Dados dos espacios topológicos X e Y, una pregunta habitual consiste en determinar si X e Y son homeomorfos, y así clasificar a ambos espacios dentro de la misma clase de equivalencia bajo la relación "ser homeomorfo a". Lo anterior puede lograrse construyendo un homeomorfismo (función biyectiva continua con inversa continua) entre ambos espacios, lo cual no siempre es una tarea fácil. En muchas ocasiones, resulta más sencillo demostrar que dos espacios topológicos dados no son homeomorfos, detectando algún invariante topológico que se dé en uno de los espacios y no en el otro (por ejemplo, dos espacios con números distintos de componentes conexas no pueden ser homeomorfos, ya que el número de tales componentes es preservado por homeomorfismos).

El objetivo central de esta propuesta es explorar de manera detallada la construcción del grupo fundamental de un espacio topológico, estudiando además las propiedades de dicha construcción e interpretar la información geométrica que arroja sobre el espacio. Éste es un conocido invariante topológico que conecta información geométrica y algebraica de los espacios. Como objetivos específicos, se plantean los siguientes:

- Definición de grupo fundamental pi(X,q) de un espacio topológico X con un punto fijado q, y estudio de su estructura de grupo.

- Propiedades de pi(X,q) (en particular, establecer que pi(X,q) define un invariante topológico y compararlo con otros invariantes conocidos).

- Cálculo de pi(X,q) para algunos objetos geométricos conocidos (e interpretaciones geométricas): el grupo fundamental de una circunferencia (número de vueltas alrededor de su centro), de una espera (espacios simplemente conexos), y de un grafo conexo (números de Betti).

- Aplicaciones al cálculo: teorema del punto fijo de Brouwer, teorema fundamental del álgebra, teorema de Borsuk-Ulam, integrales de línea de campos conservativos sobre dominios simplemente conexos.

Durante el desarrollo de los objetivos anteriores, el estudiante será expuesto progresivamente a las nociones de categoría y funtor, las cuales son importantes para entender conexiones entre diferentes áreas de la matemática, como por ejemplo entre la topología y el álgebra dentro de la presente propuesta.

Prerrequisitos. Conocimientos básicos en topología general (espacios topológicos, funciones continuas, conexidad y compacidad), álgebra lineal (teoría de espacios vectoriales y transformaciones lineales), estructuras de grupos, cálculo diferencial e integral en una y varias variables.

Bibliografía.

[1] J. R. Munkres. Topology (capítulos 9, 10 y 11). Prentice Hall, Inc. Referencia principal.

[2] G. E. Bredon. Topology and Geometry (capítulo 3). Springer.

[3] M. A. Armstrong. Basic Topology (capítulo 5). Springer.

Otros comentarios. El docente Rafael Parra (IMERL) participará como co-orientador en esta tesina.

9. Teorema Fundamental del Álgebra

Docente. Marcelo Lanzilotta, marclan@fing.edu.uy.

Resumen y objetivos. El Teorema Fundamental del Álgebra afirma que cualquier polinomio complejo debe tener una raíz compleja. Este resultado básico, cuya primera demostración aceptada fue ofrecida por Gauss en su tesis doctoral de 1799 (la prueba consta desde 1797), se encuentra realmente en la intersección de muchas áreas de las matemáticas.

El objetivo de esta propuesta de Tesina es examinar un par o dos pares de pruebas del Teorema (de un total de tres pares que se le ofrecerá al estudiante). La primera demostración de cada par es bastante sencilla y sólo depende de lo que podría considerarse matemática elemental. Sin embargo, cada una de estas primeras demostraciones se presta a generalizaciones que, a su vez, conducen a resultados más generales a partir de los cuales se puede llegar a conclusiones más generales a partir de los cuales el Teorema Fundamental puede deducirse como consecuencia directa. Estos resultados generales constituyen la segunda demostración de cada par. Describimos abajo las áreas donde se formula cada par de pruebas descritas anteriormente. Primer par: Números complejos - Análisis complejo. Segundo par: Álgebra - Extensiones de cuerpos - Teoría de Galois. Tercer par: Topología - Topología Algebraica.

Prerrequisitos. Los prerrequisitos están contemplados en los cursos actuales de Formación Docente (CERP's, - IPA - etc.) de Profesoradod e Matemática. Los cursos de Matemática hechos en la etapa de la Diplomatura son bienvenidos.

Bibliografía.

[1] B. FIne, G. Rosemberg, The Fundamental Theorem of Algebra, SpringerVerlag, New York, 1997.

[2] S. M. Gersten, J. R. Stallings, On Gauss's first proof of the fundamental theorem of algebra, Proc. Amer. Math. Soc. 103 (1988) 331–332.

10. Geometrías de Hilbert

Docente. León Carvajales, leon.carvajales@fcea.edu.uy.

Resumen y objetivos. Todo conjunto convexo del espacio proyectivo soporta una geometría natural, llamada geometría de Hilbert. Para definir la misma se utiliza la noción de razón doble, que surgió naturalmente en la antigüedad en el estudio de las proporciones y la perspectiva.

Ejemplos de Geometrías de Hilbert son la geometría euclidiana clásica y la geometría hiperbólica, las cuales (re)visitaremos usando este punto de vista. Luego nos moveremos a otros convexos, con particular interés por aquellos que poseen suficientes isometrías. El tema es vasto y podrán elegirse distintas opciones de profundización en distintos temas, de acuerdo a los intereses específicos de quien realice la tesina. Por ejemplo, podrán estudiarse aspectos generales de la geometría y/o dinámica de estos convexos, sus deformaciones, posibles implementaciones en algún lenguaje de computación adecuado, étc.

Prerrequisitos. Un curso de álgebra lineal y geometría.

Bibliografía.

[1] Benoist, Y. A survey on divisible convex sets . Morningside center, Beijing 2006, Adv. Lect. Math. 6 (2008) p.1-18

[2] Marquis, L. Around groups in Hilbert geometry. Handbook of Hilbert geometry, 207–261. IRMA Lect. Math. Theor. Phys., 22.

11. Acción del grupo modular en el grafo de Farey

Docente. Juan Alonso, juan@cmat.edu.uy.

Resumen y objetivos. El grupo modular es un grupo obtenido de las matrices 2x2 con coeficientes enteros, que puede verse como las simetrías de un grafo infinito cuyos vértices son los números racionales, llamado grafo de Farey. La relación entre el grupo y el grafo permite describir algebraicamente el grupo modular, lo que será el primer objetivo de la tesina. Además, dichos objetos tienen interpretaciones en términos de curvas esenciales en el toro (una superficie con un agujero), de las posibles geometrías Euclídeas del toro, y de la geometría del plano hiperbólico, que culminan en la llamada teoría de Teichmuller para el caso del toro. Un objetivo más ambicioso es presentar un panorama de dicha teoría.

Prerrequisitos. La propuesta es adaptable a varios niveles de conocimiento previo, y parte de la tesina podrá ser exponer los prerrequisitos para hacer el trabajo accesible a un público más amplio.

Algún conocimiento de álgebra es esperado, p. ej. álgebra lineal.

También algún manejo muy básico de inglés, para leer la bibliografía.

Bibliografía básica de grupos. [1] Carter, N. Visual group theory. Mathematical Association of America, 2009.

[2] Gonçalvez, A. Introdução à álgebra, IMPA, Rio de Janeiro, 1979.

También hay varias notas para esta parte.

Bibliografía sobre el tema específico. [3] Bonahon, F. Low-dimensional geometry, from euclidean surfaces to hyperbolic knots. Student Math. Library, IAS vol 49, 1955.

[4] Clay, M. Geometric group theory. (Notas, 2022).

12. Grafos y grupos libres

Docente. Juan Alonso, juan@cmat.edu.uy.

Resumen y objetivos. Los grupos "libres"son los que no cumplen otra restricción más que los axiomas de grupo, y por esto son una herramienta básica para estudiar los grupos en general. Están muy relacionados con los grafos a través la topología algebraica. El objetivo será entender esta relación, y cómo operaciones geométricas/topológicas sobre los grafos llamadas "dobleces"permiten obtener resultados algebraicos sobre los grupos libres.

Prerrequisitos. La propuesta es adaptable a varios niveles de conocimiento previo, y parte de la tesina podrá ser exponer los prerrequisitos para hacer el trabajo accesible a un público más amplio.

Algún conocimiento de álgebra es esperado, p. ej. álgebra lineal.

También algún manejo muy básico de inglés, para leer la bibliografía.,

Bibliografía básica de grupos. [1] Carter, N. Visual group theory. Mathematical Association of America, 2009.

[2] Gonçalvez, A. Introdução à álgebra, IMPA, Rio de Janeiro, 1979.

También hay varias notas para esta parte.

Bibliografía sobre el tema específico. [3] Clay, M., Margalit, D. (Ed.). Office hours with a geometric group theorist. Princeton univ. press, 2017.

[4] Bestvina, M. Folding graphs and applications, d'aprés Stallings. Notas de curso, 2010.

13. Grupos finitos de matrices

Docente. Juan Alonso, juan@cmat.edu.uy.

Resumen y objetivos. Estudiaremos los grupos de matrices invertibles con coeficientes en los enteros módulo p (p un número primo). Estos grupos proporcionan ejemplos básicos de grupos finitos "simples", es decir, que no se descomponen como construcciones a partir de otros grupos. Además, presentan acciones lineales y proyectivas en espacios "geométricos"finitos, que nos permiten obtener resultados algebraicos. El objetivo general es entender dichos grupos y acciones, y presentar una aplicación de las mismas: Una opción puede ser probar la simplicidad. La otra es una prueba geométrica de un isomorfismo entre dos grupos, que a priori se presentan de formas muy diferentes (GL(2,3) y PSL(2,7)).

Prerrequisitos. La propuesta es adaptable a varios niveles de conocimiento previo, y parte de la tesina podrá ser exponer los prerrequisitos para hacer el trabajo accesible a un público más amplio.

Algún conocimiento de álgebra es esperado, p. ej. álgebra lineal.

También algún manejo muy básico de inglés, para leer la bibliografía.

Bibliografía básica de grupos. [1] Carter, N. Visual group theory. Mathematical Association of America, 2009.

[2] Gonçalvez, A. Introdução à álgebra, IMPA, Rio de Janeiro, 1979.

También hay varias notas para esta parte.

Bibliografía sobre el tema específico. [1] Conrad, K. Simplicity of PSL_n(F). (Notas)

[2] Brown, E., Loehr, N. Why is PSL(2,7) isom. GL(3,2)? Amer. Math. Monthly, Vol 116 No. 8 (2009).

14. Introducción a la teoría de grafos

Docente. Viviana Gubitosi, vivianagubi@gmail.com.

Resumen y objetivos. El problema de los puentes de Königsberg, también llamado más específicamente problema de los siete puentes de Königsberg, es un célebre problema matemático resuelto por Leonhard Euler en 1736 y cuya resolución dió origen a la teoría de grafos. Su nombre se debe a Königsberg, la ciudad de Prusia Oriental y luego de Alemania que desde 1945 se convirtió en la ciudad rusa de Kaliningrado.

El problema se formuló en el siglo XVIII y consistía en encontrar un recorrido para cruzar a pie toda la ciudad pasando solo una vez por cada uno de los puentes y regresando al mismo punto de inicio.

Con este problema como motivación el objetivo de la tesina es el estudio de los fundamentos básicos de la Teoría de Grafos.

Prerrequisitos. No tiene.,

Bibliografía.

[1] J. Harris, J. Hirst, M. Mossinghoff, Çombinatorics and graph theory", Undergraduate text in Mathematics, Springer, 2000.

[2] Bollobás, B. "Modern Graph Theory. Academic Press, 1985.

[3] Frank Harary. "Graph Theory". Addison Wesley series in Mathematics. Addison-Wesley, 1971.

15. Método de elementos finitos

Docente. Juan Pablo Borthagaray. jpborthagaray@fing.edu.uy.

Resumen y objetivos. El objetivo del Método de Elementos Finitos es la resolución computacional de ecuaciones en derivadas parciales, tales como la de Laplace, o la del calor. En su formulación más clásica, el método se basa en las llamadas formulaciones débiles (o variacionales) de los problemas en cuestión. Los objetivos de esta propuesta de tesina son estudiar la noción de solución débil, describir e implementar el método de elementos finitos para algunos problemas en una y dos dimensiones, y obtener algunas estimaciones a priori del error.

Prerrequisitos. Cálculo en una y varias variables. Conocimientos de ecuaciones diferenciales y programación son útiles, pero no necesarios.

Bibliografía.

[1] C. Johnson. Numerical solution of partial differential equations by the finite element method.

16. Cálculo de variaciones y superficies mínimas

Docente. Juan Pablo Borthagaray, jpborthagaray@fing.edu.uy.

Resumen y objetivo. El cálculo de variaciones consiste en buscar extremos relativos de ciertas funciones (llamadas funcionales) cuyo dominio es un conjunto de funciones. Los funcionales por lo general se expresan como integrales definidas que involucran a las funciones y sus derivadas. Proponemos considerar varios ejemplos, demostrar cómo de la condición de extremo relativo se llega a una cierta ecuación en derivadas parciales (llamada ecuación de Euler-Lagrange asociada al funcional), y vamos a estudiar concretamente la aplicación de la teoría al problema de superficies mínimas, que son superficies que localmente minimizan su área.

Prerrequisitos. Cálculo en varias variables.

Bibliografía.

[1] P. Olver. The calculus of variations.

17. Generalización del concepto de espacio vectorial

Docente. Rafael Parra. rparra@fing.edu.uy.

Resumen y objetivos. Un espacio vectorial es una colección de objetos llamados vectores, que pueden sumarse entre sí y multiplicarse por números, denominados escalares en este contexto. Los escalares suelen ser números reales, pero también existen espacios vectoriales con multiplicación escalar por números complejos, números racionales o, en general, cualquier cuerpo.

Un módulo sobre un anillo es una generalización del concepto de espacio vectorial sobre un cuerpo, en el que los escalares correspondientes son los elementos de un anillo arbitrario dado, y se define una multiplicación entre los elementos del anillo y los del módulo. Aunque ambos conceptos parecen iguales en términos de definición, un análisis más profundo revela diferencias que originan una nueva línea de estudio.

El objetivo de esta tesina es explorar y ejemplificar algunas de estas diferencias. Con el propósito de ser lo más autocontenido posible, formalizaremos en los capítulos iniciales conceptos y resultados básicos sobre módulos y anillos. Para espacios vectoriales de dimensión finita presentaremos el concepto análogo de módulo libre de rango finito (aquellos que son isomorfos a una suma directa finita de copias del anillo.

A continuación, se presenta una lista de algunas propiedades de los módulos sobre anillos conmutativos que enfatizan las diferencias entre módulos y espacios vectoriales:

1. Un submódulo de un módulo finitamente generado no es necesariamente finitamente generado. 2. Existen módulos sin elementos linealmente independientes y, por lo tanto, sin base. 3. Un conjunto generador minimal o un conjunto linealmente independiente maximal no son necesariamente una

base. 4. Existen módulos libres con submódulos que no son libres. 5. Existen módulos libres con conjuntos linealmente independientes que no están contenidos en una base y conjuntos generadores que no contienen una base.

Objetivos especificos.

1. Desarrollar la teoría correspondiente a la noción de módulo sobre un anillo arbitrario. 2. Caracterizar las propiedades fundamentales de los módulos sobre anillos específicos.

Prerrequisitos. Como prerrequisito, es necesario tener conocimientos básicos de álgebra lineal.

Bibliografía.

[1] Kenneth Hoffman and Ray Kunze. Algebra Lineal . 1979

[2] Steven Roman. Advanced Linear Algebra. Springer. 2008.

Otros comentarios. Es en co-tutoria con Marco Pérez (IMERL).

18. La estimación de máxima versimilitud

Docente. Juan Kalemkerian. jkalemkerian@hotmail.com.

Resumen y objetivos. Cuando tenemos observaciones X1,X2,...,Xn de una variable aleatoria X cuya distribución es conocida a menos de un conjunto de parámetros, el método de máxima verosimilitud, es un procedimiento (planteado como tal por primera vez por Fischer en 1912) para estimar el valor de los parámetros a partir de los datos observados. Si bien hay otros métodos generales para estimar parámetros, el método de máxima verosimilitud ha sido desde sus inicios el más utilizado debido a sus buenas propiedades teóricas y al buen desempeño en su aplicación a muchas situaciones de las más diversas disciplinas. La propuesta para la tesina consiste en estudiar la idea heurística en la cual está basado el método, el abordaje de sus propiedades teóricas, incluyendo la demostración de los teoremas de consistencia y normalidad asintótica con aplicaciones a la construcción de intervalos de confianza asintóticos. Finalmente, se pretende utilizar esta metodología para series de datos reales, modelando la distribución de la velocidad máxima del viento medido en determinada torre anemométrica proveniente de algún parque eólico uruguayo. El tema de aplicación podría ser relativa a otra disciplina del conocimiento.

Prerrequisitos. Un curso básico de Probabilidad es suficiente para llevar a cabo esta tesina.

Bibliografía. Notas propias.

19. El teorema de Fischer-Tippet

Docente. Juan Kalemkerian. jkalemkerian@hotmail.com.

Resumen y objetivos. El teorema de Fisher-Tippet (1928) juega un rol fundamental en el modelado matemático estadístico de valores extremos. El mismo afirma que si tenemos n observaciones y consideramos el valor máximo de las mismas que definimos como Mn= maxX1,X2,...,Xn, entonces si existen sucesiones an¿0 y bn tales que (Mn-bn)/an converge en distribución a una cierta variable aleatoria Y, entonces Y puede pertenecer a tres tipos de familias de distribuciones: Gumbel, Fréchet o Weibull. Este teorema tiene un gran impacto a la hora de modelar máximos (adaptable también a mínimos) ya que permite estimar la función de distribución de los valores extremos que pueda tomar una variable, con la cual estimar la probabilidad de que el valor máximo supere determinado umbral. En esta tesina, se propone estudiar la demostración del teorema, para lo cual en primer lugar hay que estudiar el concepto de convergencia en distribución, junto con algún método que permita estimar sus parámetros y luego aplicarlo a una serie de datos elegidas por el estudiante. Se podría trabajar por ejemplo en el modelado de temperaturas máximas o mínimas (anuales, mensuales, trimestrales, etc), lluvias extremas, máxima variación anual de la cotización del dólar, o de algún otro índice bursátil, u otro ejemplo proveniente de alguna otra área del conocimiento.

Prerrequisitos. Un curso básico de probabilidad es suficiente para poder realizar esta tesina.

Bibliografía.

[1] de Haan and A. Ferreira. Extreme Value Theory. An Introduction. Springer series in statistics. New York, NY, USA, 2006.

[2] S. I. Resnick. Heavytail phenomena: probabilistic and statistical modeling. Springer Science & Business Media, 2007.

20. Introducción a los modelos lineales

Docente. Juan Kalemkerian. jkalemkerian@hotmail.com.

Resumen y objetivos. En la vida real, frecuentemente tenemos un conjunto multivariado de observaciones (X1,Y1,Z1),(X2,Y2,Z2),...,(Xn,Yn,Zn) de una terna de variables (X,Y,Z) en donde Z es una función de X,Y, y se trata de estimar a partir de la muestra observada una función g tal que Z=g(X,Y). Los modelos lineales proponen una función g de la forma g(x,y) =ax+by+r siendo r una variable aleatoria que representa el error cometido al aproximar un valor de Z por el de g(X,Y). El hecho de que Z sea función de sólo dos variables, X e Y es sólo ilustrativo, puede ser Z en función de k variables en general. La propuesta para esta tesina sería la de estudiar bien la definición de lo que implica un modelo lineal, y estudiar los fundamentos matemáticos que permiten hacer teoría con dichos modelos, desarrollando la parte básica. Se pretende concluir la tesina modelando algún conjunto de datos reales y ver cómo se puede utilizar para realizar estimaciones y predicciones. A modo de ejemplo meramente ilustrativo, supongamos que tenemos observados 1000 individuos a las que se les mide las siguientes variables: X=consumo mensual de alcohol, Y=edad, Z=cantidad de horas mensuales que dedica al deporte, T=nivel de colesterol. ¿Cómo modelamos la variable T en función de las variables X,Y,Z? Una vez que el modelo se ha estimado, ¿ajusta bien a los datos observados? ¿Cómo a partir del modelo podemos((predecir))el nivel de colesterol que tiene un individuo de 50 años que no hace deporte y que consume 18 litros de alcohol al mes? ¿Cuál de las 3 variables consideradas tiene mayor impacto en el nivel de colesterol de un individuo? Se pretende responder e interpretar las respuestas a estas preguntas, mediante el modelo matemático propuesto.

Prerrequisitos. Un curso básico de probabilidad es suficiente para llevar a cabo esta tesina.

Bibliografía.

[1] Linear models in Statistics. Alvin Rencher (2000) Wiley.

[2] Modelos Lineales. Frances Carmona (2003). Notas de curso.

21. La esfera tridimensional como grupo de Lie

Docente. Richard Muñiz. rmuniz@cmat.edu.uy.

Resumen y objetivos. Se estudiará la estructura de grupo de la esfera de dimensón tres, viéndola desde diferentes puntos de vista. También veremos sus representaciones y aplicaciones a la física. Se introducirán las nociones básicas de grupos de Lie a través de grupos matriciales. El objetivo es adquirir nociones básicas sobre grupos de Lie y sus aplicaciones.

Prerrequisitos. Nociones de Álgebra Lineal y cáculo en varias variables.

Bibliografía.

[1] Lisetta Bruschi, Los grupos SU(2), SO(3) y sus representaciones.

[2] W. Rossmann, Lie groups, an introduction through linear algebra.

22. Elementos de teoría de nudos

Docente. Richard Muñiz,rmuniz@cmat.edu.uy.

Resumen y objetivos. La propuesta es estudiar los elementos básicos de la teoría matemática de nudos. Se verán su definición formal y propiedades elementales, así como la definición de los invariantes más sencillos. Se avanzará hasta donde sea posible, dependiendo de los conocimientos del interesado.

Prerrequisitos. Familiaridad con nociones de continuidad y es recomendable tener conocimientos de cálculo en varias variables.

Bibliografía.

[1] José Luis Cisneros, Introducción a la Teoría de Nudos.

[2] N.D.Gilbert-T.Porter, Knots and surfaces.

23. Cuantización geométrica de las ecuaciones de Maxwell

Docente. Richard Muñiz. rmuniz@cmat.edu.uy.

Resumen y objetivos. Primero se verán las ecuaciones de Maxwell del electromagnetismo con su interpretación clásica, utilizando campos vectoriales. En segundo lugar se estrudiará la interpretación de las ecuaciones desde el punto de vista de una teoría gauge con grupo U(1) (clásica). Por último, abordaremos qué significa la cuantización del campo electromagnético.

Prerrequisitos. Álgebra lineal y cálculo vectorial

Bibliografía.

[1] D. Griffiths, Introducción a la electrodinámica. 2. J.C. Baez,

[2] J.P. Muniain, Gauge theories, knots and gravity.

Otros comentarios. Es necesaria cierta madurez matemática y capacidad de abstracción por parte del interesado.

24. Introducción a la teoría algebraica de grafos

Docente. Viviana Gubitosi. gubitosi@fing.edu.uy.

Resumen y objetivos. La teoría algebraica de grafos es una rama de la matemática en la que se aplican métodos algebraicos para estudiar los grafos. Con distintas herramientas algebraicas se pueden obtener interesantes propiedades y caracterizar determinados tipos de grafos.

Un grafo se representa típicamente como un conjunto de puntos (vértices) unidos por líneas (aristas). En la actualidad, muchos problemas se puede representar mediante un grafo y su estudio trasciende a diversas áreas de las ciencias exactas y las ciencias sociales.

El objetivo de esta tesina es introducir al estudiante en el estudio de la Teoría algebraica de grafos. Familiarizarse con los polinomios cromáticos, la teoría espectral y el grupo de automorfismos de un grafo. Buscaremos en que hacer énfasis de acuerdo al interés del estudiante.

Prerrequisitos. Álgebra lineal.

Bibliografía.

[1] “Algebraic graph theory” de Norman Biggs.

[2] “Algebraic graph theory” de Chris Godsil y Gordon Royle.

25. Análisis y Desarrollo del Algoritmo PageRank para la Clasificación de Resultados en Motores de Búsqueda.

Docente. Rafael Parra. rparra@fing.edu.uy.

Resumen y objetivos. Los algoritmos de búsqueda utilizados por los navegadores y motores de búsqueda en Internet enfrentan dos desafíos importantes. En primer lugar, deben ser eficientes en agrupar todos los resultados disponibles en la web, los cuales pueden ser millones. En segundo lugar, deben clasificar estos resultados de manera que se presenten al usuario ordenados de acuerdo a un criterio adecuado. El algoritmo más importante que permitió a Google transformarse en una compañía de cientos de millones de dólares es PageRank. Descripción del algoritmo PageRank: PageRank es un algoritmo desarrollado por Larry Page y Sergey Brin, los fundadores de Google, en 1996 en la Universidad de Stanford como parte de un proyecto de investigación sobre un nuevo tipo de motor de búsqueda. PageRank mide la importancia de las páginas web en función del número y la calidad de los enlaces que apuntan a ellas. La premisa fundamental es que los sitios web más importantes probablemente recibirán más enlaces de otros sitios web. Según Google, PageRank funciona contando el número y la calidad de los enlaces a una página para determinar una estimación aproximada de la importancia del sitio web. Contexto matemático: Las matemáticas involucradas en PageRank son extensas y cubren tres áreas principales: Teoría de Grafos: PageRank utiliza grafos para modelar las relaciones entre las páginas web. Álgebra Lineal: Los valores propios de matrices son cruciales para el cálculo de la importancia de las páginas.

Propósito de la tesis: El propósito de esta tesina es desarrollar de manera autocontenida la mayor parte de la teoría matemática que se encuentra detrás del algoritmo PageRank para comprender a fondo su funcionamiento y su impacto en la clasificación de resultados en motores de búsqueda. Se realizará un análisis detallado de la teoría de grafos y del álgebra lineal aplicadas en PageRank, así como una revisión de las modificaciones y mejoras realizadas a lo largo de los años para aumentar su eficiencia.

Objetivos: 1. Analizar el funcionamiento del algoritmo PageRank y su impacto en la clasificación de resultados de búsqueda. 2. Desarrollar parte de la teoría matemática necesaria para comprender el algoritmo, incluyendo teoría de grafos y álgebra lineal. 3. Revisar las modificaciones y mejoras realizadas al algoritmo desde su creación.

Prerrequisitos. Como prerequisito, es necesario tener conocimientos básicos de álgebra lineal.

Bibliografía.

[1] Norman Biggs Algebraic Graph Theory. 1993

[2] Knauer, U. Algebraic Graph Theory: Morphisms, Monoids and Matrices. De Gruyter, 2011

[3] Ralph P. Grimaldi. Matemáticas discretas y combinatoria: una introducción con aplicaciones. 1998.

[4] Kenneth Hoffman and Ray Kunze. Linear Algebra. Prentice Hall, 1971.

Otros comentarios. Esta tesina seria en co-tutoria con Viviana Gubitosi (IMERL).

26. Teoría de Galois

Docente. Mauricio Achigar. mauricio.achigar3@gmail.com.

Resumen y objetivos. Se propone estudiar los aspectos necesarios de las teorías de grupos y anillos conmutativos, cuerpos y espacios vectoriales, para abordar la Teoría de Galois y obtener como aplicación la demostración de alguna de sus consecuencias clásicas, como ser, la irresolubilidad de las ecuaciones polinómicas de grado mayor a 4 por radicales, o la imposibilidad de la duplicación (construccción con regla y compás) del cubo, entre otras.

Prerrequisitos. Nociones básicas sobre cuerpos y espacios vectoriales.

Bibliografía.

[1] N. Jacobson, Lectures in Abstract Algebra - III. Thteory of FIelds and Galois Theory, Graduate Texts in Mathematics, v. 32, Springer-Verlag, 1964.

Otros comentarios. La bibliografía es vasta, variada y adaptable a las necesidades que surjan. Sólo se ha indicado un texto clásico como referencia.

27. El Teorema de Picard

Docente. Mauricio Achigar. mauricio.achigar3@gmail.com.

Resumen y objetivos. Se propone estudiar los elementos necesarios de la teoría de espacios métricos y espacios de funciones que permitan obtener los resultados clásicos de existencia y unicidad de soluciones de ecuaciones diferenciales (Teorema de Picard). Como aplicación se pueden obtener, por ejemplo, definiciones precisas de las funciones trigonométricas y la demostración de sus propiedades.

Prerrequisitos. Nociones de espacios métricos o topológicos, nociones de cálculo diferencial en varias variables, nociones de cálculo integral en una variable.

Bibliografía.

[1] O. GIl, Curso Introductorio a las Ecuaciones Diferenciales, Primera Parte, Oficina de Publicaciones del Centro de Estudiantes de Ingeniería, 1999.

Otros comentarios. La bibliografía es vasta, variada y adaptable a las necesidades. Solo se ha indicado una referencia a modo de ejemplo.

28. Aplicaciones del teorema espectral

Docente. Fernando Abadie. fabadie@cmat.edu.uy.

Resumen y objetivos. El teorema espectral es uno de los resultados más importantes del álgebra lineal y del análisis funcional. El objetivo de es dar una demostración del teorema espectral para operadores autoadjuntos y utilizarlo para resolver poblemas de ecuaciones diferenciales.

Prerrequisitos. Integración de Riemann, principalmente en una variable, y conocimientos de álgebra lineal, en particular de espacios vectoriales con producto interno.

Bibliografía.

[1] Jorge Sotomayor. Lições de equações diferenciais ordinárias. Projeto Euclides 11. IMPA, 1979.

[2] Rafael Iório Júnior , Valéria de Magalhães Iório. Equações diferenciais parciáis: uma introdução. Projeto Euclides 17. IMPA, 1988.

29. Análisis de Fourier finito

Docente. Fernando Abadie. fabadie@cmat.edu.uy.

Resumen y objetivos. Como es sabido, la representación de funciones mediante las series y las integrales de Fourier constituye una herramienta fundamental de la matemática, la física, la ingeniería y otras ciencias. Es posible extender el análisis de Fourier al contexto finito, en el cual está liberado de problemas de convergencia. Este análisis incluye las así llamadas transformada de Fourier discreta y transformada de Fourier rápida. Esta extensión es teóricamente muy relevante, y además es muy importante en las aplicaciones y en la instrumentación de dispositivos electrónicos. El objetivo de la presente propuesta consiste precisamente en estudiar dicha extensión.

Prerrequisitos. Conocimientos de álgebra lineal, y algo de grupos abelianos finitos.

Bibliografía.

[1] Elias M. Stein, Rami Shakarchi. Fourier Analysis; an introductionVolume 1 of Princeton Lectures in Analysis. Princeton University Press, Princeton NJ, 2003.

[2] Audrey Terras. Fourier Analysis on Finite Groups and Applications. London Mathematical Society Student Series 43, Cambridge University Press, 1999.

30. Series de Fourier y aplicaciones

Docente. Fernando Abadie. fabadie@cmat.edu.uy.

Resumen y objetivos. Se trata de introducir a las series de Fourier partiendo de los ejemplos que lo inspiraron originalmente a él y a otros matemáticos, desarrollar la teoría básica, en particular algunas cuestiones ligadas a diferentes nociones de convergencia, y estudiar algunas aplicaciones en diferentes campos.

Prerrequisitos. Cálculo diferencial e integral, esencialmente en una variable.

Bibliografía.

[1] Elias M. Stein and Rami Shakarchi. Fourier analysis, volume 1 of Princeton Lectures in Analysis. Princeton University Press, Princeton, NJ, 2003.

[2] Harmonic Analysis. From Fourier to Wavelets. María Cristina Pereyra and Lesley A. Ward. Student Mathematical Library. IAS/Park City Mathematical Subseries. Volume 43. AMS, 2012.

31. Equidescomponibilidad de polígonos y de poliedros

Docente. Fernando Abadie. fabadie@cmat.edu.uy.

Resumen y objetivos. Dos polígonos se dicen equidescomponibles si pueden ser descompuestos como una unión finita y disjunta de polígonos congruentes. Evidentemente dos polígonos equidescomponibles tienen la misma área. El recíproco de la afirmación previa es verdadero, y es conocido como teorema de Bolyai-Gerwien. El objetivo de esta propuesta es probar dicho teorema y considerar el problema análogo en el espacio, conocido como el tercer problema de Hilbert.

Prerrequisitos. Geometría elemental, y eventualmente algo de teoría de grupos.

Bibliografía.

[1] V.G. Boltianskii. Hilbert's Third Problem. Winston and Sons, Washington, D.C, 1978.

32. La paradoja de Banach-Tarski

Docente. Fernando Abadie. fabadie@cmat.edu.uy.

Resumen y objetivos. En 1924, S. Banach y A. Tarski probaron un teorema que puede expresarse del siguiente efectista modo: es posible cortar una naranja en una cantidad finita de pedazos, y dichos pedazos reorganizarlos de manera de producir dos naranjas del mismo tamaño que la original. El objetivo de la propuesta es exhibir una demostración del teorema de Banach-Tarski y servir de introducción al tema de las descomposiciones paradójicas y los grupos promediables.

Prerrequisitos. Álgebra lineal, y es útil, aunque no indispensable, conocer elementos básicos de la teoría de grupos.

Bibliografía.

[1] Volker Runde. Amenable Banach algebras. Springer Monographs in Mathematics. Springer-Verlag, New York, [2020] ©2020. A panorama.

[2] Stan Wagon. The Banach-Tarski paradox. Cambridge University Press, Cambridge, 1993. With a foreword by Jan Mycielski, Corrected reprint of the 1985 original.

33. La transformada de Fourier

Docente. Fernando Abadie. fabadie@cmat.edu.uy.

Resumen y objetivos. Se trata de estudiar la transformada de Fourier de funciones definidas en la recta real, y algunas de sus aplicaciones.

Prerrequisitos. Integral de Riemann en una variable.

Bibliografía.

[1] Elias M. Stein and Rami Shakarchi. Fourier analysis, volume 1 of Princeton Lectures in Analysis. Princeton University Press, Princeton, NJ, 2003.

[2] Maria Cristina Pereyra and Lesley A. Ward. Harmonic Analysis. From Fourier to Wavelets. Student Mathematical Library. IAS/Park City Mathematical Subseries, Volume 63. AMS, 2012.

34. Algebras de transformaciones lineales

Docente. Fernando Abadie. fabadie@cmat.edu.uy.

Resumen y objetivos. La propuesta consiste en estudiar álgebras de transformaciones lineales en espacios vectoriales de dimensión finita. Un objeto importante a considerar es el reticulado de subespacios invariantes, y el objetivo principal es la demostración del teorema de Burnside, que implica que, bajo determinadas condiciones, toda tal álgebra tiene un subespacio propio invariante.

Prerrequisitos. Álgebra Lineal,

Bibliografía.

[1] Douglas R. Farenick. Algebras of Linear Transformations. Universitext. Springer-Verlag New York Inc., 2001.