Sistemas dinámicos topológicamente hiperbólicos

Alfonso Artigue

Email address: aartigue@litoralnorte.udelar.edu.uy

Departamento de Matemática y Estadística del Litoral, Centro Universitario Regional Litoral Norte, Universidad de la República.

URL: http://dmel.multisitio.interior.edu.uy/alfonso-artigue/

Índice general

Capítulo 1

Prólogo

Estas notas se basan en el curso de posgrado PEDECIBA - Universidad de la República, titulado *Sistemas dinámicos topológicamente hiperbólicos* dictado del 16 de agosto al 15 de octubre de 2021.

El propósito del curso es ofrecer una introducción rápida a un conjunto importante de conceptos y resultados de la teoría de sistemas dinámicos desarrollado a lo largo del siglo XX. Para seguir adecuadamente el curso es indispensable un manejo fluido de la topología general, especialmente en espacios métricos compactos. Es recomendable, pero no necesario formalmente, tener un curso de ecuaciones diferenciales.

El objetivo principal es probar el teorema de descomposición espectral de Smale, con el complemento de Bowen, en un contexto topológico. En la versión original de Smale se asume que la dinámica es dada por un difeomorfismo que satisface el Axima A. En este texto vamos a trabajar con *hiperbolicidad topológica*, entendida como la combinación de *expansividad* y la *propiedad de sombreado*. Esta abstracción es bien conocida desde hace unos 50 años y ha demostrado tener un poder importante. Nos proponemos demostrar el teorema de descomposición espectral para homeomorfismos topológicamente hiperbólicos en espacios métricos compactos.

Alfonso Artigue
23 de febrero de 2022
Paysandú, Uruguay.

Capítulo 2

Introducción

A continuación una breve línea del tiempo mencionando sólo algunas de las contribuciones más importantes en la teoría que se desarrolla en este texto.

1898, Hadamard [9]. Este trabajo es considerado como uno de los primeros en dinámica simbólica, aplicada al estudio del flujo geodésico de superficies de curvatura negativa.

1892-1899, Poincaré [14]. Introduce el concepto de órbita homoclínica.

1920, Birkhoff [4]. Introduce nociones de recurrencia como la transitividad.

1938, Hedlund y Morse [10]. De los primeros trabajos en dinámica simbólica *abstracta*, es decir, dedicado al estudio de las propiedades dinámicas del *shift*.

1950, Utz [17]. Introduce la definición de homeomorfismo expansivo.

1967, Smale [16]. Define los difeomorfismos Axioma A y demuestra el teorema de descomposición espectral. Este artículo es de los más influyentes en la teoría de sistemas dinámicos del siglo XX.

1971, Bowen [5, 6]. Complementa el teorema espectral con la parte mixing.

1978, Bowen [7]. Dice: *My feeling is that the shadowing of pseudo-orbits is the most important dynamical property of Axiom A maps. Charles Conley has advocated this viewpoint also.*

1978, Walters [18]. En ese artículo se explota la hiperbolicidad topológica en relación a la estabilidad. Se muestra también la equivalencia entre tipo finito y sombreado para subshifts.

1978, Conley [8]. Estudia en profundidad los conjuntos dinámicamente aislados explotando la recurrencia por cadenas.

1979, Mañé [13]. Muestra que los conjuntos minimales de los expansivos son totalmente disconexos, generalizando un resultado previo de Bowen para difeomorfismos. Si bien este resultado es lateral para los objetivos de este curso, ilumina a la expansividad como propiedad importante de los difeomorfismos que satisfacen el Axioma A.

1983, Aoki [2, 3]. Muestra el teorema espectral sólo asumiendo expansividad y sombreado, en espacios métricos compactos. Este es el resultado principal que nos proponemos probar en este curso.

Capítulo 3

Dinámica topológica

Resumen. En §1 veremos las formas de recurrencia más importantes para el desarrollo del curso. Seguiremos de cerca al libro de Shub [15]. En §2 presentaremos los ejemplos principales: el shift y un difeomorfismo de Anosov. En §3 consideraremos las propiedades de transitividad y mixing.

1. Nociones de recurrencia

Sea (M, dist) un espacio métrico compacto. La clausura de un conjunto $X \subset M$ será denotada por $\mathrm{cl}(X)$. Las bolas abiertas serán indicadas como $B_r(x)$ para todo $r > 0$ y $x \in M$.

1.1. Conjuntos invariantes. Sea $f\colon M \to M$ un homeomorfismo. Decimos que $X \subset M$ es *invariante* si $f(X) = X$.

PROPOSICIÓN 3.1. *Si $X \subset M$ es invariante entonces $\mathrm{cl}(X)$ también lo es.*

DEMOSTRACIÓN. Tomemos $x \in \mathrm{cl}(X)$. Si $x \in X$ entonces no hay nada que probar porque X es invariante. Si $x \in \mathrm{cl}(X) \setminus X$ entonces podemos tomar una sucesión $y_n \in X$, $n \geq 1$, tal que $y_n \to x$. Sabemos que $f(y_n) \in X$ y por continuidad $f(y_n) \to f(x)$. Entonces $f(x) \in \mathrm{cl}(X)$ y X es invariante. $\square$

Dado $x \in M$ definimos su *órbita* como el conjunto $\mathrm{orb}(x) = \{f^i(x) : i \in \mathbb{Z}\}$.

Decimos que $x \in M$ es *fijo* si $f(x) = x$ y que es *periódico* si $f^n(x) = x$ para algún $n \geq 1$. El conjunto de puntos periódicos será denotado como $\mathrm{per}(f)$. Denotamos por $\mathrm{fix}(f)$ al conjunto de puntos fijos de f.

De la Proposición 3.1 concluimos que $\mathrm{cl}(\mathrm{per}(f))$ es un cerrado invariante.

1.2. Conjunto límite. Dado $x \in M$ definimos su conjunto ω-*límite* como

$$\omega_f(x) = \{y \in M : \exists n_k \to +\infty \text{ tal que } f^{n_k}(x) \to y\}.$$

El conjunto α-*límite* se define como $\alpha_f(x) = \omega_{f^{-1}}(x)$.

PROPOSICIÓN 3.2. *Para todo $x \in M$ los conjuntos $\omega_f(x)$ y $\alpha_f(x)$ son cerrados, invariantes y no vacíos.*

DEMOSTRACIÓN. Como M es compacto, $\omega_f(x)$ no es vacío. Veamos que es invariante. Supongamos que $f^{n_k}(x) \to y \in \omega_f(x)$. Entonces $f^{1+n_k}(x) = f(f^{n_k}(x)) \to f(y)$. Como $1 + n_k \to +\infty$, concluimos que $f(y) \in \omega_f(x)$. Para ver que $\omega_f(x)$ es cerrado tomemos una sucesión $y_n \in \omega_f(x)$ tal que $y_n \to z \in M$. Dado $m \geq 1$ tomemos $y_{n_m} \in B_{1/m}(z)$. A su vez, podemos tomar $k_m \geq m$ tal que $f^{k_m}(x) \in B_{1/m}(y_{n_m})$. Por lo tanto $\mathrm{dist}(f^{k_m}(x), z) < 2/m$, $f^{k_m}(x) \to z$ y $z \in \omega_f(x)$. La prueba es análoga para $\alpha_f(x)$. $\square$

Definimos los conjuntos

$$L_+(f) = \mathrm{cl}\left(\bigcup_{x\in M} \omega_f(x)\right),$$

$$L_-(f) = L_+(f^{-1}) \text{ y}$$

$$L(f) = L_+(f) \cup L_-(f).$$

Observar que la unión de cualquier familia de conjuntos invariantes también es invariante. Entonces, por las Proposiciones 3.1 y 3.2 estos conjuntos son cerrados, invariantes y no vacíos.

Observar que $\mathrm{cl}(\mathrm{per}(f)) \subset L(f)$. Por la Proposición 3.2 el conjunto $L(f)$ nunca es vacío. Si tomamos f como una rotación de ángulo irracional en el círculo vemos que la inclusión anterior puede ser estricta ya que ésta no tiene puntos periódicos.

1.3. Conjunto no errante. Decimos que $x \in M$ es *errante* si existe un entorno abierto U de x tal que $f^i(U) \cap U = \emptyset$ para todo $i \in \mathbb{Z}$, $i \neq 0$. Evidentemente, en ese caso todos los puntos de U son errantes; por lo tanto el conjunto de puntos errantes es abierto. Además, si x es errante entonces $f^i(x)$ también lo es, para todo $i \in \mathbb{Z}$; basta considerar el entorno abierto $f^i(U)$ de $f^i(x)$. Por lo tanto, el conjunto de puntos errantes es abierto e invariante.

El conjunto de puntos que no son errantes será denotado como $\Omega(f)$ y será llamado *conjunto no errante*. Por lo dicho anteriormente, $\Omega(f)$ es cerrado e invariante.

PROPOSICIÓN 3.3. *Se cumple que $x \in \Omega(f)$ si y sólo si para todo entorno abierto U de x existen $y \in U$ y $n \geq 1$ tales que $f^n(y) \in U$.*

DEMOSTRACIÓN. Negando la definición de punto errante obtenemos $x \in \Omega(f)$ si y sólo si para todo entorno U de x existe $i \neq 0$ tal que $f^i(U) \cap U \neq \emptyset$. En ese caso podemos tomar $z \in f^i(U) \cap U$. Sea $y = f^{-i}(z)$. Con lo cual $y \in U$ y $f^i(y) \in U$. Esto prueba la equivalencia. □

PROPOSICIÓN 3.4. *Para todo $x \in M$ se cumple que $\omega_f(x) \subset \Omega(f)$.*

DEMOSTRACIÓN. Dado $y \in \omega_f(x)$ podemos tomar $n_k \to +\infty$ tal que $f^{n_k}(x) \to y$. Dado un entorno U de y, existen $j > i > 0$ tales que $f^j(x), f^i(x) \in U$. Si definimos $z = f^i(x)$ tenemos que $z, f^{j-i}(z) \in U$. Aplicando la Proposición 3.3 concluimos que $y \in \Omega(f)$. □

COROLARIO 3.5. *Para todo entorno U de $\Omega(f)$ y $x \in M$ existe $N > 0$ tal que $f^i(x) \in U$ si $|i| \geq N$.*

DEMOSTRACIÓN. Consideraremos el caso $i \geq 0$, siendo el otro caso análogo. Argumentando por absurdo, supongamos que existe $n_k \to +\infty$ tal que $f^{n_k}(x) \notin U$ para todo $k \geq 1$. Como M es compacto, podemos suponer que $f^{n_k}(x)$ converge a un punto $y \in M$. Por un lado, $y \in \omega_f(x)$ pero por otro lado, $y \notin \Omega(f)$. Esto contradice la Proposición 3.4 y termina la prueba. □

COROLARIO 3.6. *Se cumple que $L(f) \subset \Omega(f)$.*

DEMOSTRACIÓN. Es directo de la Proposición 3.4. □

En el Ejemplo 3.13 veremos que la inclusión puede ser estricta.

1.4. Recurrencia por cadenas. Dado $\varepsilon > 0$ decimos que una sucesión $x_i \in M$, $i \in \mathbb{Z}$, es una *ε-seudo órbita* si $\operatorname{dist}(f(x_i), x_{i+1}) < \varepsilon$ para todo $i \in \mathbb{Z}$. Una ε-seudo órbita x_i es *periódica* si existe $n \geq 1$ tal que $x_i = x_{i+n}$ para todo $i \in \mathbb{Z}$. Decimos que los puntos de una ε-seudo órbita periódica son *ε-seudo periódicos*. Un punto es *seudo periódico* si es ε-seudo periódico para todo $\varepsilon > 0$. Al conjunto de los puntos seudo periódicos lo denotaremos como $R(f)$.

LEMA 3.7. *Para todo $\delta > 0$ existe $\delta' > 0$ tal que si z_i es δ'-seudo órbita entonces $f(z_i)$ es δ-seudo órbita.*

DEMOSTRACIÓN. Como M es compacto tenemos que f es uniformemente continua, por lo cual, dado $\delta > 0$ tomamos $\delta' > 0$ tal que si $\operatorname{dist}(a, b) < \delta'$ entonces $\operatorname{dist}(f(a), f(b)) < \delta$. □

PROPOSICIÓN 3.8. *El conjunto $R(f)$ es invariante.*

DEMOSTRACIÓN. Es directo del Lema 3.7. □

Ejercicio: probar que $R(f)$ es cerrado.

TEOREMA 3.9. *Para todo homeomorfismo $f\colon M \to M$ se cumple*

$$\operatorname{cl}(\operatorname{per}(f)) \subset L(f) \subset \Omega(f) \subset R(f).$$

DEMOSTRACIÓN. Sólo resta probar la última inclusión. Supongamos que x es un punto no errante. Dado $\varepsilon > 0$ tomemos $\delta \in (0, \varepsilon)$ tal que si $\operatorname{dist}(x, y) < \delta$ entonces $\operatorname{dist}(f(x), f(y)) < \varepsilon$. Por la Proposición 3.3 existen $y \in B_\delta(x)$ y $n \geq 1$ tales que $f^n(y) \in B_\delta(x)$. Definamos

$$z_0 = x, z_1 = f(y), z_2 = f^2(y), \dots, z_{n-1} = f^{n-1}(y), z_n = x.$$

Como $y \in B_\delta(x)$ tenemos que $\operatorname{dist}(f(z_0), z_1) < \varepsilon$. Como $f^n(y) \in B_\delta(x)$ y $\delta < \varepsilon$ concluimos que $\operatorname{dist}(f(z_{n-1}), z_n) < \varepsilon$. Por lo tanto, x es ε-seudo periódico y termina la prueba. □

En el Ejemplo 3.11 mostraremos que la inclusión $\Omega(f) \subset R(f)$ puede ser estricta.

2. Ejemplos

2.1. Dinámica simbólica. Sea S un conjunto finito y definamos $S^{\mathbb{Z}} = S^{\mathbb{Z}}$. Un elemento x de $S^{\mathbb{Z}}$ es una función de $\mathbb{Z}$ en S. Usaremos la notación $x(i) = x_i$ para $i \in \mathbb{Z}$. Vamos a definir una distancia en $S^{\mathbb{Z}}$. Consideremos la función $N\colon S^{\mathbb{Z}} \times S^{\mathbb{Z}} \to \mathbb{Z} \cup \{+\infty\}$ dada por

$$N(x, y) = \begin{cases} \text{máx}\{n \geq 0 : x_i = y_i \text{ para todo } |i| < n\} & \text{si } x \neq y, \\ +\infty & \text{si } x = y. \end{cases}$$

Por ejemplo, si $x_0 \neq y_0$ tenemos que $N(x, y) = 0$. Si $x_0 = y_0$ pero $x_1 \neq y_1$ (o $x_{-1} \neq y_{-1}$) entonces $N(x, y) = 1$. Dado $\lambda > 1$ definimos $\operatorname{dist}(x, y) = \lambda^{-N(x,y)}$. Es un ejercicio de topología probar que $(S^{\mathbb{Z}}, \operatorname{dist})$ es un espacio métrico compacto. Definimos *el shift* como $\sigma\colon S^{\mathbb{Z}} \to S^{\mathbb{Z}}$ tal que $\sigma(x) = y$ si $x_i = y_{i+1}$ para todo $i \in \mathbb{Z}$. Otro ejercicio: probar que σ es un homeomorfismo.

PROPOSICIÓN 3.10. $\operatorname{cl}(\operatorname{per}(\sigma)) = S^{\mathbb{Z}}$.

DEMOSTRACIÓN. Tomemos $x \in S^{\mathbb{Z}}$ y fijemos un bloque $B = (x_{-N}, \dots, x_0, x_1, \dots, x_N)$. Consideremos $p \in S^{\mathbb{Z}}$ formado por la repetición del bloque B. Es claro que $\sigma^{2N+1}(p) = p$ y que $\operatorname{dist}(x, p) < \lambda^{-N}$. □

2.2. Subshifts. Un *subshift* es un subconjunto no vacío y cerrado $\Sigma \subset S^{\mathbb{Z}}$ invariante por el shift.

EJEMPLO 3.11. En $\{0,1\}^{\mathbb{Z}}$ consideramos el subshift formado por los puntos fijos (las secuencias $p =$*todos ceros* y $q =$*todos unos*) y las órbitas de $\dots, 0, 0, 1, 1, \dots$ y $\dots, 1, 1, 0, 0, \dots$. Se cumple que $\Omega(\sigma|_\Sigma) = \{p, q\}$ y $R(\sigma|_\Sigma) = \Sigma$. Este ejemplo complementa el Teorema 3.9, mostrando que la inclusión puede ser estricta.

EJEMPLO 3.12 (Un subshift minimal). Sea $f\colon S^1 \to S^1$ una rotación de ángulo irracional en el círculo. En el círculo tomemos dos puntos diametralmente opuestos p, q que determinen dos arcos abiertos A, B. Consideramos el conjunto de símbolos $S = \{A, B\}$ y definimos $a \in S^{\mathbb{Z}}$ mediante la condición $f^i(x) \in a_i$ para todo $i \in \mathbb{Z}$, siendo x un punto del círculo que no esté en la órbita de p ni en la de q. Definimos el subshift $\Sigma = \mathrm{cl}(\mathrm{orb}(a))$. Se cumple que Σ es un conjunto de Cantor minimal.

EJEMPLO 3.13. Consideremos $\Sigma \subset \{0,1\}^{\mathbb{Z}}$ tal que $x \in \Sigma$ si y sólo si ningún bloque de x es de la forma $10^m 1^n 0$, con $m, n \geq 1$. Consideremos tres elementos de Σ: x tal que $x_i = 0$ para todo $i \in \mathbb{Z}$, y tal que $y_i = 0$ para todo $i \in \mathbb{Z}$ y z tal que $z_i = 1$ para todo $i \geq 0$, $z_i = 0$ para todo $i < 0$. Enumeramos algunas propiedades: 1) Σ es un subshift, 2) $L(\sigma|_\Sigma) = \{x, y\}$, 3) $z \in \Omega(\sigma|_\Sigma)$. Este ejemplo complementa al Corolario 3.6.

2.3. Subshift de tipo finito. Un subshift $\Sigma \subset S\mathbb{Z}$ es de *tipo finito* si existe $N \geq 1$ y un conjunto P de bloques de largo $N + 1$ tal que para todo $x \in \Sigma$ se tiene que todo bloque de largo $N + 1$ de x está en el conjunto P. El *orden* del subshift es el mínimo N que cumple la definición.

Sean $f\colon M \to M$ y $g\colon N \to N$ dos homeomorfismos. Decimos que f y g son *semiconjugados* si existe $h\colon M \to N$ continua y sobreyectiva tal que $hf = gh$. Si h es homeomorfismos decimos que son *conjugados*.

Ejercicio: probar que las siguientes propiedades son invariantes por conjugación: expansividad, sombreado, transitividad.

PROPOSICIÓN 3.14. *Todo subshift de tipo finito es conjugado a un subshift de tipo finito de orden $N = 1$.*

DEMOSTRACIÓN. Supongamos Σ subshift de tipo finito con conjunto de bloques *permitidos* P (bloques de largo $N+1$). Usaremos a P como nuevo conjunto de símbolos. Definimos $h\colon \Sigma \to P^{\mathbb{Z}}$ de la siguiente forma. Dado $x \in \Sigma$, tomamos $y = h(x)$ con $y_i = (x_i, \dots, x_{i+N}) \in P$ para todo $i \in \mathbb{Z}$. Sea σ' el shift en $P^{\mathbb{Z}}$ y $\Sigma' = h(\Sigma)$. Queda como ejercicio verificar que: $h\colon \Sigma \to \Sigma'$ conjuga σ y σ' y que Σ' es subshift de tipo finito de orden 1. $\square$

2.4. Un difeomorfismo de Anosov. Sea $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la transformación lineal dada por $T(x, y) = (2x + y, x + y)$. Consideremos el toro de dimensión 2 $M = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$. Es decir, consideramos la relación de equivalencia $(x_1, y_1) \sim (x_2, y_2)$ si $x_1 - x_2, y_1 - y_2 \in \mathbb{Z}$. De este modo, el toro es el espacio cociente de $\mathbb{R}^2$ por esta relación de equivalencia. Sea $f\colon M \to M$ el homeomorfismo inducido por T en el cociente. Ejercicios: mostrar que f está bien definida, M es espacio métrico compacto y f es homeomorfismo.

Un cálculo directo nos da que T tiene dos valores propios reales λ_s, λ_u tales que $0 < \lambda_s < 1 < \lambda_u$. Estos valores inducen subespacios propios E_s, E_u, respectivamente. Si $\pi\colon \mathbb{R}^2 \to M$ es la proyección canónica, entonces se puede probar que tanto $\pi(E_s)$ como $\pi(E_u)$ son densos en M.

PROPOSICIÓN 3.15. $\mathrm{cl}(\mathrm{per}(f)) = M$.

Demostración. Vamos a ver que $\pi(x,y)$ es periódico si x,y son racionales. Supongamos que $x = a/b$ y $y = c/d$ con a,b,c,d enteros. Sea m el mínimo común múltiplo de b y d. Un cálculo directo nos da que $f^n(\pi(x,y)) = \pi(x_n/m, y_n/m)$ con x_n, y_n enteros para todo $n \geq 1$. Eligiendo apropiadamente los representantes podemos suponer además que $0 \leq x_n, y_n < m$. Un argumento de finitud no da que $x_0 = x_n$, $y_0 = y_n$ para algún $n \geq 1$. Esto implica que $\pi(x,y)$ es periódico. □

3. Transitividad y mixing

3.1. Transitividad. En esta sección seguimos al libro de Walters [19, §5.4],
Decimos que f es *transitivo* si existe $x \in M$ tal que $\mathrm{cl}(\mathrm{orb}(x)) = M$.

Proposición 3.16. *Un homeomorfismo f es transitivo si y sólo si dados dos abiertos no vacíos $U, V \subset M$ existe $i \in \mathbb{Z}$ tal que $f^i(U) \cap V \neq \emptyset$.*

Demostración. Para ver el directo tomemos $x \in M$ tal que $\mathrm{cl}(\mathrm{orb}(x)) = M$ y dos abiertos U y V. Tomemos $j,k \in \mathbb{Z}$ tales que $f^j(x) \in U$ y $f^k(x) \in V$. Sean $y = f^j(x)$ e $i = k - j$. De este modo $y \in U$ y $f^i(y) = f^{k-j}(f^j(x)) = f^k(x) \in V$. Con lo cual, $f^i(U)$ intersectado con V es no vacío.

Veamos el recíproco. Sea $\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una base numerable de la topología de M. Definamos $\tilde{U}_n = \cup_{i\in\mathbb{Z}} f^{-i}(U_n)$. Cada $\tilde{U}_n$ es abierto y por hipótesis también es denso. Sea $T = \cap_{n\in\mathbb{N}}\tilde{U}_n$. Por el Teorema de Baire tenemos que T es denso y en particular, no vacío. Vamos a probar que todo $x \in T$ tiene órbita densa. Sabemos que $x \in \tilde{U}_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Luego, para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $i \in \mathbb{Z}$ tal que $x \in f^i(U_n)$. O sea, $f^i(x) \in U_n$. Esto permite concluir que la órbita de x es densa en M. □

Observación 3.17. En realidad, el conjunto T de la prueba anterior es exactamente el conjunto de puntos con órbita densa. Un conjunto que es intersección numerable de abiertos se denomina *conjunto G_δ*. De la prueba anterior vemos que la transitividad implica que el conjunto de puntos con órbita densa es G_δ denso.

Veamos un criterio que nos permite concluir transitividad. Sea A_n una sucesión de subconjuntos de M. Decimos que $A_n \to M$ si para todo $\varepsilon > 0$ existe $m \geq 1$ tal que $B_\varepsilon(A_n) = M$ para todo $n \geq m$.

Proposición 3.18. *Si existe una sucesión de puntos periódicos p_n tal que $\mathrm{orb}(p_n) \to M$ entonces f es transitivo.*

Demostración. Dados dos abiertos no vacíos U, V, podemos tomar $x \in U$, $y \in V$ y $\varepsilon > 0$ tales que $B_\varepsilon(x) \subset U$ y $B_\varepsilon(y) \subset V$. Por hipótesis podemos tomar un punto periódico p cuya órbita corta a ambas bolas. Aplicando la Proposición 3.16 concluimos la transitividad de f. □

3.2. Mixing. Decimos que f es *(topológicamente) mixing* si para todo par de abiertos no vacíos $U, V \subset M$ existe $N \geq 1$ tal que $f^n(U) \cap V \neq \emptyset$ para todo $n \geq N$. Observar que mixing implica transitivo.

Vamos a ver un criterio para obtener mixing mediante conjuntos estables e inestables globales de puntos periódicos. Dado $x \in M$ definimos

$$W^s(x) = \{y \in M : \mathrm{dist}(f^n(x), f^n(y)) \to 0 \text{ cuando } n \to +\infty\},$$

$$W^u(x) = \{y \in M : \mathrm{dist}(f^{-n}(x), f^{-n}(y)) \to 0 \text{ cuando } n \to +\infty\}.$$

Proposición 3.19. *Si* $\mathrm{cl}(\mathrm{per}(f)) = M$ *y para todo* $p, q \in \mathrm{per}(f)$ *se tiene que* $W^u(p) \cap W^s(q) \neq \emptyset$ *entonces* f *es mixing.*

Demostración. Sean U y V abiertos no vacíos. Tomemos puntos periódicos $p \in U$, $q \in V$ y sea $N \geq 1$ tal que $f^N(q) = q$. Para cada $n = 0, 1, \ldots, N-1$ tomemos $x_n \in W^u(p) \cap W^s(f^{-n}(q))$. Sea k_0 tal que $f^{-k_0 N}(x_n) \in U$ para todo $n = 0, 1, \ldots, N-1$ y además, para todo $k \geq k_0$ se cumpla que $f^{kN}(x_n) \in f^{-n}(V)$ para todo $n = 0, 1, \ldots, N-1$.

Dado $m \geq 2k_0 N$ cualquiera podemos escribir $m = (k_0+k)N+n$ con $k \geq k_0$ y $0 \leq n \leq N-1$. De este modo, $f^{-k_0 N}(x_n) \in U$ y

$$f^m(f^{-k_0 N}(x_n)) = f^{kN+n}(x_n) = f^n(f^{kN}(x_n)) \in V.$$

Es decir, $f^m(U) \cap V \neq \emptyset$ para todo $m \geq 2k_0 N$. □

Corolario 3.20. *El shift y el Anosov de* $\mathbb{T}^2$ *son mixing.*

Demostración. El caso del Anosov se deduce de la Proposición 3.19 y de lo visto en el Capítulo 2.4. Por la Proposición 3.10 sabemos que los puntos periódicos del shift son densos. Para aplicar la Proposición 3.19 tomemos dos puntos periódicos p, q. Supongamos que $p = \ldots AAA \ldots$ y $q = \ldots BBB \ldots$ siendo A, B dos bloques finitos en el conjunto de símbolos. El punto $x = \ldots AAABBB \ldots$ está en $W^s(p) \cap W^u(q)$ y la prueba termina. □

Capítulo 4

Homeomorfismos hiperbólicos

Resumen. En §1 presentamos a los homeomorfismos expansivos. Se recomienda los libros de J. Lewowicz [**11**] y P. Walters [**19**] para ampliar el tema. La §2 se dedica a la propiedad del sombreado. En §3 estudiamos conjuntos estables e inestables. En §4 consideramos la propiedad de estructura de producto local. En §5 se introducen los conjuntos básicos de la descomposición espectral: las clases de recurrencia. En §6 consideramos conjuntos *dinámicamente* aislados. En §7 presentamos los conjuntos elementales de la descomposición espectral: las clases homoclínicas. En §8 se establece el teorema de descomposición espectral. La lectura de este capítulo se puede complementar con [**3**, **6**, **8**, **15**, **19**].

1. Homeomorfismos expansivos

Supongamos que el espacio M es el objeto de estudio de un experimentador cuya capacidad de observación limitada sólo le permite distinguir dos puntos si están a una distancia mayor que α. La propiedad de expansividad le garantiza a este observador que todo par de puntos distintos serán distinguibles por la dinámica. A continuación se presenta una formalización de esta idea y se explora sus consecuencias.

Decimos que un homeomorfismo $f\colon M \to M$ es *expansivo* si existe una constante $\alpha > 0$ tal que si $x, y \in M$, $x \neq y$, entonces $\text{dist}(f^i(x), f^i(y)) > \alpha$ para algún $i \in \mathbb{Z}$. En este caso decimos que α es una *constante de expansividad.*

Proposición 4.1. *El shift es expansivo.*

Demostración. Dados $x \neq y$ sea $i \in \mathbb{Z}$ tal que $x_i \neq y_i$. Entonces $\text{dist}(\sigma^i(x), \sigma^i(y)) = 1$. Con lo cual, cualquier $\alpha \in (0, 1)$ es constante de expansividad para σ. □

Ejercicio: probar que el Anosov del Capítulo 2.4 es expansivo.

Proposición 4.2. *Si f es expansivo entonces* $\text{fix}(f)$ *es finito.*

Demostración. Como M es compacto, si hay infinitos puntos fijos podemos tomar dos de ellos, p y q (distintos), tales que $\text{dist}(p, q) < \alpha$, siendo α una constante de expansividad. Obtendríamos $\text{dist}(f^i(p), f^i(q)) = \text{dist}(p, q) < \alpha$ para todo $i \in \mathbb{Z}$. Esta contradicción prueba el resultado. □

Proposición 4.3. *Son equivalentes:*

1. *f es expansivo,*
2. *f^i es expansivo para todo $i \in \mathbb{Z}$, $i \neq 0$,*
3. *f^i es expansivo para algún $i \in \mathbb{Z}$, $i \neq 0$.*

DEMOSTRACIÓN. Es claro que 1 $\to$ 2 $\to$ 3. Veamos 3 $\to$ 1. Tomemos $i \neq 0$ y una constante de expansividad α para f^i. Por la compacidad de M y la continuidad de f y sus iterados f^j, $|j| \leq |i|$, sabemos que existe $\beta > 0$ tal que si $\operatorname{dist}(x, y) > \alpha$ entonces $\operatorname{dist}(f^j(x), f^j(y)) > \beta$ para todo $|j| \leq |i|$. Es claro que este β es constante de expansividad para f. $\square$

COROLARIO 4.4. *Si f es expansivo entonces* $\operatorname{per}(f)$ *es numerable.*

DEMOSTRACIÓN. Es directo de las Proposiciones 4.2 y 4.3, observando que $\operatorname{per}(f) = \cup_{n\geq 1} \operatorname{fix}(f^n)$. $\square$

El cardinal de un conjunto X será denotado como $\# X$.

PROPOSICIÓN 4.5. *Si f es expansivo entonces existe $k \geq 2$ tal que $\# \operatorname{fix}(f^n) \leq k^n$.*

DEMOSTRACIÓN. Sea α una constante de expansividad y tomemos un cubrimiento de M abierto y finito $\mathcal{U}$ cuyos miembros tengan diámetro menor que α. Sea $k = \#\mathcal{U}$. Para cada $p \in \operatorname{fix}(f^n)$ podemos tomar $x^p \in \mathcal{U}^n$ tal que $f^i(p) \in x^p_i$ para todo $i = 0, 1, \ldots, n$. Para esto simplemente hay que elegir un abierto del cubrimiento al cual pertenezca cada iterado de p. Como los abiertos del cubrimiento tienen diámetro menor que α, si $p, q \in \operatorname{fix}(f^n)$ son distintos, entonces $x^p \neq x^q$. Como el cardinal de $\mathcal{U}^n$ es k^n, obtenemos la acotación buscada. $\square$

PROPOSICIÓN 4.6. *Todo homeomorfismo expansivo en un espacio métrico compacto es semiconjugado a un subshift. Si el espacio es totalmente disconexo entonces existe conjugación.*

DEMOSTRACIÓN. Sea α una constante de expansividad y S un cubrimiento de M por cerrados de diámetro menor que α. Sea

$$\Sigma = \{x \in S^{\mathbb{Z}} : \cap_{i\in\mathbb{Z}} f^{-i}(x_i) \neq \emptyset\}.$$

Observar que cada x_i es uno de los cerrados del cubrimiento. Por lo tanto, $y \in \cap_{i\in\mathbb{Z}} f^{-i}(x_i)$ si y sólo si $f^i(y) \in x_i$ para todo $i \in \mathbb{Z}$. Por la expansividad tenemos que el conjunto $\cap_{i\in\mathbb{Z}} f^{-i}(x_i)$ puede contener a lo sumo un punto. Definimos $h \colon \Sigma \to M$ de la siguiente forma. Dado $x \in \Sigma$, tomamos el único punto $y \in M$ tal que $\cap_{i\in\mathbb{Z}} f^{-i}(x_i) = \{y\}$ y definimos $h(x) = y$. Es claro que h es sobreyectiva. Queda como ejercicio verificar que h es semiconjugación.

Si M es totalmente disconexo entonces podemos suponer que el cubrimiento S es una partición (los cerrados son disjuntos). Con esto se obtiene la inyectividad de h y por tanto, conjugación. $\square$

2. Propiedad de sombreado

Continuando la idea del experimentador, ahora supongamos que en cada medición éste comete un cierto error. De este modo, en lugar de tener órbitas verdaderas lo que tendremos son seudo órbitas. La propiedad de sombreado garantiza que estas seudo órbitas en realidad están próximas a órbitas verdaderas. Esto se puede formalizar del siguiente modo.

Decimos que f tiene la propiedad de *sombreado* si para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si x_i, $i \in \mathbb{Z}$, es una δ-seudo órbita entonces existe $y \in M$ tal que

$$\operatorname{dist}(f^i(y), x_i) < \varepsilon \text{ para todo } i \in \mathbb{Z}. \tag{1}$$

Si se cumple (1) decimos que la órbita de y *ε-sombrea* a la seudo órbita. Decimos que f es un *homeomorfismo hiperbólico* si f es expansivo y tiene la propiedad de sombreado.

PROPOSICIÓN 4.7. *Supongamos que f es hiperbólico con constante de expansividad α. Para $0 < \varepsilon < \alpha/2$ tomemos $\delta > 0$ del sombreado. Entonces es único el punto que ε-sombrea a cualquier δ-seudo órbita dada.*

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que x_i, $i \in \mathbb{Z}$, es una δ-seudo órbita que es ε-sombreada por dos puntos, y, z. Entonces $\operatorname{dist}(f^i(y), x_i) < \varepsilon$ y $\operatorname{dist}(f^i(z), x_i) < \varepsilon$ para todo $i \in \mathbb{Z}$. Por la desigualdad triangular tenemos que $\operatorname{dist}(f^i(y), f^i(z)) < 2\varepsilon < \alpha$, con lo cual concluimos que $y = z$ por la expansividad. □

PROPOSICIÓN 4.8. *Si f es hiperbólico entonces $\operatorname{cl}(\operatorname{per}(f)) = R(f)$.*

DEMOSTRACIÓN. Por el Teorema 3.9 sabemos que $\operatorname{cl}(\operatorname{per}(f)) \subset R(f)$. Tomemos $x \in R(f)$. Sean α una constante de expansividad y $\delta > 0$ dado por el sombreado para algún $\varepsilon \in (0, \alpha/2)$. Como $x \in R(f)$, sabemos que existe una δ-seudo órbita x_i y $N \geq 1$ tales que $x_0 = x$ y $x_i = x_{i+N}$ para todo $i \in \mathbb{Z}$. Supongamos que y ε-sombrea, o sea, $\operatorname{dist}(f^i(y), x_i) < \varepsilon$ para todo $i \in \mathbb{Z}$. Sea $z = f^N(y)$. Entonces

$$\operatorname{dist}(f^i(z), x_i) = \operatorname{dist}(f^{i+N}(y), x_i) = \operatorname{dist}(f^{i+N}(y), x_{i+N}) < \varepsilon$$

para todo $i \in \mathbb{Z}$. Es decir, z también ε-sombrea. Por la Proposición 4.7 concluimos que $y = z$, es decir, y es periódico. Como $\operatorname{dist}(x, y) < \varepsilon$ y ε es arbitrario, concluimos que $x \in \operatorname{cl}(\operatorname{per}(f))$. □

En [**18**] Walters probó que un subshift tiene sombreado si y sólo si es de tipo finito.

3. Conjuntos estables e inestables

Dado $\varepsilon > 0$ definimos el *conjunto estable local* de x como

$$W^s_\varepsilon(x) = \{y \in M : \operatorname{dist}(f^n(x), f^n(y)) \leq \varepsilon, \forall n \geq 0\}.$$

El *conjunto inestable local* se define como

$$W^u_\varepsilon(x) = \{y \in M : \operatorname{dist}(f^{-n}(x), f^{-n}(y)) \leq \varepsilon, \forall n \geq 0\}.$$

Ejercicio: probar que los conjuntos estables locales son cerrados.

PROPOSICIÓN 4.9. *Son equivalentes:*

(a) *f es expansivo con constante de expansividad α,*

(b) *$W^s_\alpha(x) \cap W^u_\alpha(x) = \{x\}$ para todo $x \in M$.*

Ambas condiciones implican:

(c) *$W^s_{\alpha/2}(x) \cap W^u_{\alpha/2}(y)$ tiene a lo sumo un punto para todo $x, y \in M$.*

La condición (c) implica que f es expansivo con constante de expansividad $\alpha/2$.

Ejercicio: probar la Proposición 4.9.

PROPOSICIÓN 4.10. *Si f es expansivo con constante de expansividad α y $0 < \varepsilon < \alpha$ entonces $W^s_\varepsilon(x) \subset W^s(x)$ y $W^u_\varepsilon(x) \subset W^u(x)$ para todo $x \in M$.*

Demostración. Por absurdo, supongamos que $y \in W^s_\varepsilon(x)$ pero $y \notin W^s(x)$ (la prueba para conjuntos inestables es análoga). Esto implica que $\operatorname{dist}(f^n(x), f^n(y)) \leq \varepsilon$ para todo $n \geq 0$ y que existen $\rho > 0$ ($\rho < \varepsilon$) y $n_k \to +\infty$ tales que $\operatorname{dist}(f^{n_k}(x), f^{n_k}(y)) > \rho$ para todo $k \geq 1$. Como M es compacto podemos suponer que $f^{n_k}(x) \to a$ y $f^{n_k}(y) \to b$, $a, b \in M$. Notar que $\operatorname{dist}(a, b) \geq \rho$, en particular $a \neq b$. Para $i \in \mathbb{Z}$ tenemos $f^{n_k+i}(x) \to f^i(a)$ y $f^{n_k+i}(y) \to f^i(b)$ cuando $k \to +\infty$. Si $n_k + i \geq 0$ (recordar que i puede ser negativo) entonces $\operatorname{dist}(f^{n_k+i}(x), f^{n_k+i}(y)) \leq \varepsilon$, con lo cual, tomando límite, $\operatorname{dist}(f^i(a), f^i(b)) \leq \varepsilon$. Como $i \in \mathbb{Z}$ es arbitrario y $a \neq b$, obtenemos una contradicción que termina la prueba. □

Ejercicio: Probar que si f es expansivo entonces

$$W^s(x) = \cup_{n \geq 0} f^{-n}(W^s_\varepsilon(f^n(x))$$

y

$$W^u(x) = \cup_{n \geq 0} f^{n}(W^u_\varepsilon(f^{-n}(x))$$

para todo $x \in M$, siendo ε menor que una constante de expansividad.

4. Estructura de producto local

Decimos que un homeomorfismo tiene la propiedad de *estructura de producto local* si para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $\operatorname{dist}(x, y) < \delta$ entonces $W^s_\varepsilon(x) \cap W^u_\varepsilon(y) \neq \emptyset$ y $W^u_\varepsilon(x) \cap W^s_\varepsilon(y) \neq \emptyset$. Por la Proposición 4.9 tenemos que si f es expansivo con constante de expansividad α y $\varepsilon < \alpha/2$ entonces $W^s_\varepsilon(x) \cap W^u_\varepsilon(y)$ y $W^u_\varepsilon(x) \cap W^s_\varepsilon(y)$ determinan (cada uno) un único punto, asumiendo estructura de producto local.

Proposición 4.11. *Todo homeomorfismo hiperbólico tiene estructura de producto local.*

Demostración. Dado $\varepsilon > 0$ tomemos $\varepsilon' \in (0, \varepsilon)$ tal que si $\operatorname{dist}(a, b) < \varepsilon'$ entonces $\operatorname{dist}(f^{\pm 1}(a), f^{\pm 1}(b)) < \varepsilon$. Tomamos δ del sombreado asociado a ε' (toda δ-seudo órbita se puede ε'-sombrear). Tomemos $x, y \in M$ tales que $\operatorname{dist}(x, y) < \delta$. Consideremos $z_i = f^i(y)$ si $i \geq 0$ y $z_i = f^i(x)$ si $i < 0$. Observar que z_i es una δ-seudo órbita. Tomamos $u \in M$ que ε'-sombrea, $\operatorname{dist}(f^i(u), z_i) < \varepsilon'$ para todo $i \in \mathbb{Z}$. Para $i \geq 0$ tenemos que $\operatorname{dist}(f^i(u), f^i(y)) < \varepsilon'$, por lo tanto $u \in W^s_{\varepsilon'}(y) \subset W^s_\varepsilon(y)$ (ya que $\varepsilon' < \varepsilon$. Para $i < 0$ tenemos que $\operatorname{dist}(f^i(u), f^i(x)) < \varepsilon'$. Por la forma en que elegimos a ε' tenemos que $\operatorname{dist}(f^{-1}(u), f^{-1}(x)) < \varepsilon'$ implica $\operatorname{dist}(u, x) < \varepsilon$. Con lo cual $u \in W^u_\varepsilon(x)$. En definitiva, $u \in W^s_\varepsilon(x) \cap W^u_\varepsilon(y)$. Intercambiando x con y se obtiene otro punto $v \in W^s_\varepsilon(y) \cap W^u_\varepsilon(x)$. □

En relación al recíproco del resultado anterior, es sabido que todo expansivo con estructura de producto local tiene sombreado. La prueba original de R. Bowen depende de la construcción de una métrica hiperbólica. Recientemente M. Achigar [1] obtiene una prueba más directa.

5. Clases de recurrencia

Vamos a definir una relación de equivalencia en $R(f)$. Dados $x, y \in R(f)$ decimos que $x \overset{\text{Rec}}{\sim} y$ si para todo $\delta > 0$ existen δ-seudo órbitas a_i, b_i y $k, l \geq 1$ tales $a_0 = x, a_k = y, b_0 = y, b_l = x$. Como estamos en $R(f)$ es claro que $x \overset{\text{Rec}}{\sim} x$ para todo $x \in R(f)$. De la definición se tiene que $x \overset{\text{Rec}}{\sim} y$ implica $y \overset{\text{Rec}}{\sim} x$. Para probar la transitividad basta concatenar las seudo órbitas correspondientes. Con esto vemos que $\overset{\text{Rec}}{\sim}$ es una relación de equivalencia en $R(f)$. Las clases de equivalencia serán denotadas como $[x] = \{y \in R(f) : y \overset{\text{Rec}}{\sim} x\}$ y las llamaremos *clases de recurrencia*.

Proposición 4.12. *Las clases de recurrencia son invariantes.*

Demostración. Por el Lema 3.7 tenemos que $x \overset{\text{Rec}}{\sim} y$ si y sólo si $f(x) \overset{\text{Rec}}{\sim} f(y)$, es decir que $f([x])$ es una clase de recurrencia. Veamos que en realidad esa clase es la de x. Mostraremos que $x \overset{\text{Rec}}{\sim} f(x)$. Para ir de x a $f(x)$ simplemente tomamos $x_0 = x$ y $x_1 = f(x)$. Ahora vamos de $f(x)$ hasta x. Como $x \in R(f)$ podemos tomar una δ'-seudo órbita y_i tal que $y_0 = y_k = x$ para algún $k \geq 1$. Consideremos la sucesión $z_0 = f(x), z_1 = y_2, z_2 = y_3, \dots, z_{k-1} = y_k = x$. Por continuidad, si δ' es pequeño, entonces esta sucesión determina una δ-seudo órbita desde $f(x)$ hasta x. $\square$

Proposición 4.13. *Si f es hiperbólico entonces cada clase $[x]$ es abierta y cerrada en $R(f)$.*

Demostración. Sea α una constante de expansividad y para $\varepsilon = \alpha/2$ tomemos δ de la estructura de producto local (Proposición 4.11).

Tomemos $x \in R(f)$. Supongamos que $y \in B_{\delta/3}(x) \cap R(f)$. Por la Proposición 4.8 sabemos que $\mathrm{cl}(\mathrm{per}(f)) = R(f)$. Tomemos $p \in B_{\delta/3}(x) \cap \mathrm{per}(f)$ y $q \in B_{\delta/3}(y) \cap \mathrm{per}(f)$. De esta forma tenemos que $\mathrm{dist}(p, q) < \delta$ y podemos tomar el punto z en $W^s_\varepsilon(p) \cap W^u_\varepsilon(q)$. Supongamos que m es un múltiplo común de los períodos de p y q. Entonces, $f^{nm}(z) \to p$ y $f^{-nm}(z) \to q$ cuando $n \to +\infty$. Tomemos k grande tal que $f^k m(z) \in B_{\delta/3}(x)$ y $f^{-km}(z) \in B_{\delta/3}(y)$. Considerando el segmento de órbita $\{f^i(z) : |i| \leq km\}$ podemos definir una δ-seudo órbita desde x hasta y. Como δ es arbitrario y podemos intercambiar los roles de x e y, concluimos que $y \in [x]$.

Por último, cada clase es cerrada ya que es el complemento de la unión de las restantes clases (que son abiertas). $\square$

Corolario 4.14. *Si f es hiperbólico entonces $R(f)$ es unión disjunta de finitas clases de recurrencia.*

Demostración. Por ser una relación de equivalencia, sabemos que las clases son disjuntas o iguales, es decir, tenemos una partición de $R(f)$ en clases de equivalencia. Por la Proposición 4.13 tenemos que la descomposición en clases es en realidad un cubrimiento abierto. Como $\mathrm{cl}(\mathrm{per}(f)) = R(f)$ (Proposición 4.8) y M es compacto, tenemos que $R(f)$ es compacto. El cubrimiento abierto dado por las clases, debe admitir un subcubrimiento finito, pero esto sólo es posible si la descomposición en clases es finita. $\square$

Proposición 4.15. *Si f es hiperbólico y X es una clase de recurrencia entonces existe una sucesión de puntos periódicos $p_n \in X$ tales que $\mathrm{orb}(p_n) \to X$.*

Demostración. Dado $\varepsilon > 0$, menor que una constante de expansividad, tomemos un conjunto finito $A = \{a_1, \dots, a_n\} \subset X$ tal que $B_{\varepsilon/2}(A) = X$. Supongamos que toda δ-seudo órbita se puede $\varepsilon/2$-sombrear. Como X es una clase de recurrencia, para cada pareja (a_i, a_{i+1}) o (a_n, a_1) podemos tomar una δ-seudo órbita desde el primero hasta el segundo. Concatenando todas, obtenemos una δ-seudo órbita periódica. Por la propiedad de sombreado, esta δ-seudo órbita periódica se puede $\varepsilon/2$ sombrear por una órbita verdadera. La expansividad implica que esta órbita verdadera es periódica. Si p está en esa órbita periódica, vemos que $B_\varepsilon(\mathrm{orb}(p)) = X$. $\square$

Teorema 4.16. *Si f es hiperbólico entonces $R(f)$ es unión disjunta de finitos cerrados invariantes (las clases de recurrencia) $X_1, \dots, X_k$ tales que $f\colon X_i \to X_i$ es transitivo para todo $i = 1, \dots, k$.*

Demostración. Los conjuntos X_i son las clases de recurrencia. Por el Corolario 4.14 sabemos que son un número finito de tales clases. Por las Proposiciones 4.12 y 4.13 sabemos que son cerradas e invariantes. Por las Proposiciones 4.15 y 3.18 concluimos que $f\colon X_i \to X_i$ es transitivo. $\square$

6. Conjuntos dinámicamente aislados

Supongamos que $X \subset M$ es un cerrado invariante. Decimos que X es *(dinámicamente) aislado* si existe un entorno U de X tal que

$$X = \cap_{i\in\mathbb{Z}} f^{-i}(U).$$

Esta condición significa que si $f^i(x) \in U$ para todo $i \in \mathbb{Z}$ entonces $x \in X$.

Ejercicio: Consideremos el homeomorfismo producto $f \times f$ en $M \times M$ y la diagonal $\Delta = \{(x, x) \in M \times M\}$. Probar que f es expansivo si y sólo si Δ es aislada para $f \times f$.

Proposición 4.17. *Si f es hiperbólico entonces las clases de recurrencia son aisladas.*

Demostración. Sean $X_1, \dots, X_k$ las clases de recurrencia. Sabemos que cada una es cerrada, invariante y abierta en $R(f)$. Sea $\varepsilon > 0$ tal que $\mathrm{cl}(B_\varepsilon(X_i)) \cap \mathrm{cl}(B_\varepsilon(X_j)) = \emptyset$ para todo $1 \le i < j \le k$. Supongamos que $f^i(x) \in B_\varepsilon(X_j)$ para todo $i \in \mathbb{Z}$ y algun $j \in \{1, \dots, k\}$.

Dado $\delta > 0$, por el Corolario 3.5 existen $N \ge 1$ e $y, z \in X_j$ tales que $\mathrm{dist}(f^N(x), y) < \delta$ y $\mathrm{dist}(f^{-N}(x), z) < \delta$. Como y y z están en una misma clase de recurrencia, existe un δ-seudo órbita a_i desde y hasta z. Concatenando el segmento de órbita $f^{-N}(x), \dots, f^N(x)$ con a_i vemos que $x \in R(f)$. Como $x \in B_\varepsilon(X_j)$ tenemos que $x \in X_j$. $\square$

Corolario 4.18. *Si f es hiperbólico entonces $R(f)$ es aislado.*

La prueba es un ejercicio. Sugerencia: probar que la unión disjunta de finitos conjuntos aislados es aislada.

Proposición 4.19. *Si f es hiperbólico entonces f restringido a una clase de recurrencia tiene sombreado.*

Demostración. Sea X una clase de recurrencia e y_i una δ-seudo órbita en X que se ε-sombrea por $z \in M$. Como cada y_i está en X y $\mathrm{dist}(y_i, f^i(z)) < \varepsilon$, tenemos que $f^i(z) \in B_\varepsilon(X)$ para todo $i \in \mathbb{Z}$. Si ε es pequeño, como X es aislado, concluimos que $z \in X$. $\square$

7. Clases homoclínicas

Dado un punto periódico $p \in M$ decimos que $x \in M$ es un *punto homoclínico* asociado a p si $x \in W^s(p) \cap W^u(p)$, es decir, x y p son asintóticos a futuro y a pasado. Definimos la *clase homoclínica* de p como

$$H(p) = \mathrm{cl}(W^s(p) \cap W^u(p)).$$

Proposición 4.20. *Si f es hiperbólico, p es periódico y X es la clase de recurrencia de p entonces $H(p) \subset X$.*

Demostración. Observar que como X es cerrado, es suficiente probar que todo punto homoclínico asociado a p está en X. Tomemos $x \in W^s(p) \cap W^u(p)$. Vamos a probar que $x \overset{\mathrm{Rec}}{\sim} p$. Dado $\delta > 0$ sea $N \ge 1$ tal que $f^N(x) \in B_\delta(p)$ y $f^{-N+1}(x) \in B_\delta(f(p))$. Utilizando los segmentos de órbita $(x, f(x), \dots, f^{N-1}(x), p)$ y $(p, f^{-N+1}(x), f^{-N+2}(x), \dots, f^{-1}(x), x)$ obtenemos δ-seudo órbitas que prueban que $x \overset{\mathrm{Rec}}{\sim} p$. $\square$

Proposición 4.21. *Si f es hiperbólico entonces $H(f(p)) = f(H(p))$ para todo punto periódico $p \in M$.*

Demostración. Se prueba de la siguiente manera

$$\begin{aligned} H(f(p)) &= \mathrm{cl}(W^s(f(p)) \cap W^u(f(p))) \\ &= \mathrm{cl}(f(W^s(p)) \cap f(W^u(p))) \\ &= \mathrm{cl}(f(W^s(p) \cap W^u(p))) \\ &= f(\mathrm{cl}(W^s(p) \cap W^u(p))) = f(H(p)). \end{aligned}$$

El lector podrá verificar cada unos de los pasos. □

Dados dos puntos periódicos p y q definimos $p \overset{\mathrm{Hom}}{\sim} q$ si $W^s(p) \cap W^u(q) \neq \emptyset$ y $W^s(q) \cap W^u(p) \neq \emptyset$.

Proposición 4.22. *Si f es hiperbólico entonces $\overset{\mathrm{Hom}}{\sim}$ es una relación de equivalencia en* $\mathrm{per}(f)$.

Demostración. Es claro que $p \overset{\mathrm{Hom}}{\sim} p$ y que $p \overset{\mathrm{Hom}}{\sim} q$ implica $q \overset{\mathrm{Hom}}{\sim} p$. Supongamos $p \overset{\mathrm{Hom}}{\sim} q$ y $q \overset{\mathrm{Hom}}{\sim} r$ con $p, q, r \in \mathrm{per}(f)$. Tomemos $x \in W^s(p) \cap W^u(q)$ e $y \in W^s(q) \cap W^u(r)$. Sea N un múltiplo (grande) común de los tres períodos tal que $f^N(y)$ y $f^{-N}(x)$ estén cerca de q. Esto implica que $f^N(y)$ y $f^{-N}(x)$ están cerca entre sí, y podemos aplicar la propiedad de estructura de producto local para encontrar $z \in W^u(f^N(y)) \cap W^s(f^{-N}(x))$. Esto implica $z \in W^u(r) \cap W^s(p)$. Análogamente se encuentra otro punto en $W^s(r) \cap W^u(p)$. □

Proposición 4.23. *Si f es hiperbólico entonces*

$$H(p) = \mathrm{cl}\{q \in \mathrm{per}(f) : p \overset{\mathrm{Hom}}{\sim} q\}.$$

En particular tenemos que $H(p) = \mathrm{cl}(\mathrm{per}(f) \cap H(p))$.

Demostración. Sea x un punto homoclínico asociado a p. Por la Proposición 4.20 sabemos que x está en la clase de recurrencia de p. Por la Proposición 4.8 sabemos que cerca de x hay un punto periódico q. Por la propiedad de estructura de producto local sabemos que los conjuntos estables e inestables de x cortan a los de q. Esto prueba que $p \overset{\mathrm{Hom}}{\sim} q$. Con esto probamos que $H(p) \subset \mathrm{cl}\{q \in \mathrm{per}(f) : p \overset{\mathrm{Hom}}{\sim} q\}$.

Para probar la otra inclusión supongamos que $p \overset{\mathrm{Hom}}{\sim} q$ y encontraremos un punto homoclínico asociado a p próximo a q. Tomemos $x \in W^u(p) \cap W^s(q)$ e $y \in W^s(p) \cap W^u(q)$. Para ε pequeño dado, tomemos el correspondiente δ dado por la estructura de producto local. Sea N un múltiplo (grande) de los períodos de p y de q tal que $f^N(x)$ y $f^{-N}(y)$ estén próximos a q, a menos de $\delta/2$. Por la estructura de producto local tenemos $z \in W^u_\varepsilon(f^N(x)) \cap W^s_\varepsilon(f^{-N}(y))$. Este punto z está próximo a q y es homoclínico asociado a p. □

Proposición 4.24. *Si f es hiperbólico y $q \in \mathrm{per}(f) \cap H(p)$ entonces $p \overset{\mathrm{Hom}}{\sim} q$ y $H(p) = H(q)$. Consecuentemente, $p \overset{\mathrm{Hom}}{\sim} q$ si y sólo si $H(p) = H(q)$.*

Demostración. Esto es porque tanto $\{q \in \mathrm{per}(f) : p \overset{\mathrm{Hom}}{\sim} q\}$ como $\mathrm{per}(f) \cap H(p)$ son densos en $H(p)$. Por la propiedad de estructura de producto local sabemos que si dos puntos periódicos están próximos entonces están relacionados homoclínicamente. Entonces, en realidad $\{q \in \mathrm{per}(f) : p \overset{\mathrm{Hom}}{\sim} q\} = \mathrm{per}(f) \cap H(p)$. □

PROPOSICIÓN 4.25. *Si f es hiperbólico entonces existe $\delta > 0$ tal que $B_\delta(H(p)) \cap R(f) = H(p)$ para todo punto periódico p. Consecuentemente, las clases homoclínicas son abiertos relativos de $R(f)$ y si $H(p) \cap H(q) \neq \emptyset$ entonces $H(p) = H(q)$.*

DEMOSTRACIÓN. Por la estructura de producto local existe $\delta > 0$ tal que si $\operatorname{dist}(p,q) < \delta$ entonces $p \overset{\text{Hom}}{\sim} q$. Por la densidad de los puntos periódicos, tanto en $H(p)$ como en $R(f)$, se concluye que $B_\delta(H(p)) \cap R(f) = H(p)$. □

PROPOSICIÓN 4.26. *Si f es hiperbólico entonces toda clase de recurrencia es unión finita y disjunta de sus clases homoclínicas y éstas son permutadas cíclicamente por f.*

DEMOSTRACIÓN. Sea X una clase de recurrencia. Primero veamos que todo punto $x \in X$ está en una clase homoclínica. En un entorno de x sabemos que hay puntos periódicos (densos) y que todos ellos están homoclínicamente relacionados entre sí (e.p.l.). Por lo tanto, x está en la clase homoclínica de cualquiera de estos puntos periódicos.

Como las clases homoclínicas son abiertos relativos, disjuntas y cobren al compacto X, tenemos finitas clases homoclínicas.

Sabemos que f preserva las clases homoclínicas. Como f es transitivo en cada clase de recurrencia, concluimos que f permuta cíclicamente las clases homoclínicas dentro de una misma clase de recurrencia. □

PROPOSICIÓN 4.27. *Si f es hiperbólico y p, q son puntos periódicos en una misma clase homoclínica H entonces $W^u(p) \cap W^s(q) \subset H$.*

DEMOSTRACIÓN. Sabemos que $p \overset{\text{Hom}}{\sim} q$. Tomemos $x \in W^u(q) \cap W^s(p)$ e $y \in W^s(q) \cap W^u(p)$. Concatenando segmentos de las órbitas de x e y obtenemos una δ-seudo órbita periódica (con período múltiplo de los períodos de p y de q), que será sombreada por una órbita periódica que pase cerca de p, de x y de q. Este nuevo punto periódico esta en H. Esto prueba que $x \in H$. □

PROPOSICIÓN 4.28. *Si f es hiperbólico, $H \subset M$ es una clase homoclínica invariante por f^N entonces $f^N : H \to H$ es mixing.*

DEMOSTRACIÓN. Es consecuencia de las Proposiciones 3.19 y 4.27. □

8. Descomposición espectral y un poco más

Llegamos al resultado principal del curso. La demostración ya la tenemos pronta.

TEOREMA 4.29 (Descomposición espectral). *Si f es hiperbólico entonces:*

1. *$R(f)$ es unión disjunta de finitas clases de recurrencia que son invariantes y transitivas,*
2. *cada clase de recurrencia es unión disjunta de finitas clases homoclínicas que son permutadas cíclicamente por f,*
3. *si H es una clase homoclínica invariante por f^n, entonces $f^n : H \to H$ es topológicamente mixing.*

DEMOSTRACIÓN. Por la Proposición 4.12 sabemos que las clases de recurrencia son invariantes. Por el Corolario 4.14 sabemos que $R(f)$ es unión disjunta de finitas clases de recurrencia. La transitividad de dichas clases fue probada en el Teorema 4.16. Esto completa el primer punto.

El segundo punto es exactamente la Proposición 4.26.

La propiedad de mixing del tercer punto fue probada en la Proposición 4.28. □

El teorema de descomposición espectral muestra algunas propiedades dinámicas en el conjunto no errante. Veamos a continuación qué sucede con los puntos errantes.

Proposición 4.30. *Si f es hiperbólico y $x \in M$ es un punto errante entonces existen $a, b \in R(f)$, en clases de recurrencia distintas, tales que $x \in W^s(a) \cap W^u(b)$.*

Demostración. Sean $X_1, \dots, X_k$ las clases de recurrencia. Por la Proposición 4.17 sabemos que éstas son aisladas, por lo tanto podemos tomar entornos aislantes $U_1, \dots, U_k$ de cada clase. Tomemos x errante.

Por el Corolario 3.5 y el hecho de que las clases de recurrencia son invariantes tenemos que existen $i \in \{1, \dots, k\}$ y $m \geq 1$ tales que $f^n(x) \in U_i$ para todo $n \geq m$. Para esto, eventualmente podría ser necesario tomar entornos aislantes más pequeños.

Para m grande y δ chico, tomemos $z \in X_i \cap B_\delta(f^m(x))$. Ahora consideramos la δ-seudo órbita

$$\dots, f^{-3}(z), f^{-2}(z), f^{-1}(z), z, f^{m+1}(x), f^{m+2}(x), f^{m+3}(x), \dots$$

Esta seudo órbita es sombreada por un punto y. Por un lado concluimos que $f^n(y) \in U_i$ para todo $n \in \mathbb{Z}$, y como U_i es aislante tenemos que $y \in X_i$. Por otro lado, $\operatorname{dist}(f^n(y), f^n(f^m(x))) < \varepsilon$ para todo $n \geq 0$. Por lo cual, $y \in W^s_\varepsilon(f^m(x)) \subset W^s(f^m(x))$. Si definimos $a = f^{-m}(y)$, esto implica que $x \in W^s(a)$, con $a \in X_i$.

Análogamente se encuentra el punto b en una clase de recurrencia X_j tal que $x \in W^u(b)$. Resta probar que $X_i \neq X_j$. Supongamos que fuesen iguales. Dado $\delta > 0$ existe $N \geq 1$ tal que $\operatorname{dist}(f^N(x), f^N(a)) < \delta$ y $\operatorname{dist}(f^{-N}(x), f^{-N}(b)) < \delta$. Desde $f^N(a)$ hasta $f^{-N}(b)$ podemos tomar una δ-seudo órbita $y_1, \dots, y_m$, ya que a y b están en la misma clase de recurrencia X_i $(= X_j)$. Mediante una concatenación obtenemos la δ-seudo órbita:

$$x, f(x), \dots, f^{N-1}(x), y_1, \dots, y_m, f^{N-1}(x), \dots, f^{-1}(x), x$$

que comienza y termina en x. Como δ es arbitrario, esto implica que x es recurrente por cadenas. Esto contradice que x es errante y la prueba termina. □

La situación planteada por el resultado anterior nos invita a hacer la siguiente definición. Dadas dos clases de recurrencia X, Y indicamos $X \rightsquigarrow Y$ si existen $a \in Y$ y $b \in X$ tales que $W^s(a) \cap W^u(b)$ es no vacío.

Proposición 4.31. *Si f es hiperbólico entonces $\rightsquigarrow$ define un orden parcial en el conjunto de las clases de recurrencia.*

Demostración. Es claro que $X \rightsquigarrow X$ para cualquier clase X, basta tomar $a = b$ cualquier punto de X. Si $X \rightsquigarrow Y \rightsquigarrow Z$, entonces tenemos un punto que va de X a Y y otro que va de Y a Z. Utilizando la transitividad en Y podemos definir una seudo órbita de X a Z, la cual será sombreada por una órbita real que va de X a Z. Esto prueba que $X \rightsquigarrow Z$.

Si $X \rightsquigarrow Y$ e $Y \rightsquigarrow X$, entonces con argumentos similares a los del párrafo anterior podemos obtener un punto de X que está en la misma clase de recurrencia de un punto de Y. Esto implica que $X = Y$. □

Bibliografía

[1] M. Achigar, *A note on Anosov homeomorphisms*, Axioms, special issue Shadowing in Dynamical Systems **8** (2019).

[2] N. Aoki, *On Homeomorphisms with Pseudo-Orbit Tracing Property*, Tokyo J. Math. **6** (1983), 329–334.

[3] N. Aoki and K. Hiraide, *Topological theory of dynamical systems*, North-Holland, 1994.

[4] G.D. Birkhoff, *Surface transformations and their dynamical applications*, Acta Math. **43** (1920), 1-119.

[5] R. Bowen, *Periodic points and measures for Axiom A diffeomorphisms*, Trans. Amer. Math. Soc. **154** (1971), 377–397.

[6] ———, *Equilibrium States and the Ergodic Theory of Anosov Diffeomorphisms*, Vol. 470, Springer Lecture Notes in Maths., 1975.

[7] ———, *On Axiom A Diffeomorphisms*, American Mathematical Society, 1978.

[8] C. Conley, *Isolated invariant sets and the Morse index*, AMS, 1978.

[9] J. Hadamard, *Les surfaces à courbures opposées et leurs lignes géodésiques*, Journal de Mathematiques Pures et Appliquées **4** (1898), 27-73.

[10] G.A. Hedlund and M. Morse, *Symbolic dynamics*, Amer. J. Math. **60** (1938), 815–866.

[11] J. Lewowicz, *Dinámica de los homeomorfismos expansivos*, Monografías del IMCA, 2003.

[12] R. Mañé, *Expansive diffeomorphisms*, Dynamical Systems—Warwick 1974, 1975, pp. 162-174.

[13] ———, *Expansive homeomorphisms and topological dimension*, Trans. of the AMS **252** (1979), 313–319.

[14] H. Poincaré, *Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste, Vols. I, II, III, Paris,1892, 1893, 1899*, Dover, New York, 1957.

[15] M. Shub, *Global stability of dynamical systems*, Springer-Verlag, 1987.

[16] S. Smale, *Differentiable dynamical systems*, Bull. Amer. Math. Soc. **73** (1967), 747-817.

[17] W.R. Utz, *Unstable homeomorphisms*, Proc. Amer. Math. Soc. **1** (1950), 769–774.

[18] P. Walters, *On the pseudo orbit tracing property and its relationship to stability*, Lect. Notes. in Math. **668** (1978), 231–244.

[19] ———, *An Introduction to Ergodic Theory*, Springer-Verlag New York, Inc., 1982.